JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **26.3.2012 / Ratkaisut 6+2=8**
D 381 klo. 16-18.

1. *Todista eksponenttifunktion avulla, että Lien matriisiryhmän neutraalialkiolla on ympäristö, joka on sileä monisto.*

(Entä onko koko ryhmä monisto?)

Ratkaisu: Olkoon $d = \dim \mathfrak{g}$, missä $\mathfrak{g}$ on ryhmän G Lien algebra. Muistetaan, että eksponenttikuvaus kaikkien $n \times n$-matriisien vektoriavaruudelta $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = M_{n\times n}$ kääntyvien matriisien ryhmälle $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ voidaan rajoittaa bijektioksi neutraalialkioiden $0 \in M_{n\times n}$ ja $\mathbf{1} \in \mathrm{GL}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$ avointen ympäristöjen $A \subset M_{n\times n}$ ja $V \subset M_{n\times n}$ välille, käänteiskuvauksena sarjan määrittelemä logaritmi.

Euklidisena avaruutena, erityisesti siis topologisena avaruutena, $M_{n\times n}$ on sama kuin $\mathbb{R}^{n^2}$ ja osajoukkona myös $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on avoin joukko avaruudessa $M_{n\times n} \sim \mathbb{R}^{n^2}$. Edellä mainitut avoimet ympäristöt A ja V ovat siten avoimia joukkoja topologisessa avaruudessa $\mathbb{R}^{n^2}$ (tavallinen topologia). Eksponenttikuvaus on sileä, samoin sen käänteiskuvaus, logaritmi. Eksponenttikuvaus on siis klassinen diffeomorfismi euklidisesti avointen joukkojen A ja V välillä.

Lien matriisiryhmä G on $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:n topologinen aliavaruus, joten $U = G \cap V$ on sen neutraalialkion, ykkösmatriisin $\mathbf{1}$ ympäristö. Eksponenttifunktio on — tarvittaessa edelleen rajoitettuna — bijektio neutraalialkioiden $0 \in M_{n\times n}$ ja $\mathbf{1} \in \mathrm{GL}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$ avointen ympäristöjen $B \subset \mathfrak{g} \subset M_{d\times d}$ ja $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}$ välillä ja voimme tietenkin olettaa, että $B = A' \cap \mathfrak{g}$ ja $U = V' \cap G$, missä $A' \subset A \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ on avoin ja $V' = \exp(A')$, joka eksponenttikuvauksen rajoittuman diffeomorfisuuden takia on myös avoin. Siis eksponenttikuvaus on diffeomorfismi $A' \to V'$ ja $\exp(B) = V' \cap G$, joten ympäristöt $B \subset \mathfrak{g}$ ja $V' \cap G \subset G$ ovat diffeomorfiset sanan klassisessa merkityksessä.

(Lopuksi todetaan, että matriisilla $M \in G$ kertominen on Lien ryhmän määritelmän mukaan diffeomorfismi $M\cdot : G \to G$ ja kuvaa neutraalialkion matriisiksi M, joten yhdistetty kuvaus $M\cdot \circ \exp$ on pisteiden $0 \in \mathfrak{g}$ ja $M \in G$ ympäristöjen B ja $M\cdot(V' \cap G)$ välinen klassinen diffeomorfismi, joten koko ryhmä G on klassinen monisto.)

2. *Olkoot M ja N sileitä monistoja, joilla (tangenttiavaruuden) dimensiot e ja d.*

(1) *Näytä, että $M \times N$ on sileä $(d+e)$-ulotteinen monisto.*
(2) *Olkoon $p \in M$, $q \in N$. Osoita, että on olemassa luonnolinen isomorfismi $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$.*

Ratkaisu: Tulkitaan tehtävä ensin klassisin monistoin $M \subset \mathbb{R}^n$ ja $N \subset \mathbb{R}^m$. Olkoot $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ja $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ lokaaleja parametrisointeja jatkettuina diffeomorfismeiksi pisteiden $p \in M$ ja $q \in N$ ympäristöistä $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^m$ kuvajoukoilleen siten, että $\varphi(U \cap M)$ ja $\psi(V \cap N)$ ovat origoiden $0 = \varphi(p) \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^m$ ja $0 = \psi(q) \subset \mathbb{R}^e \subset \mathbb{R}^n$ avoimia ympäristöjä.

Klassisen tangenttiavaruuden määritelmän mukaan

$$Tp(M) = D\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^d) \text{ ja}$$
$$Tp(N) = D\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^e).$$

Nytpä tulomoniston määritelmän mukaan kuvaus

$$(\varphi, \psi) \text{ eli } (\varphi \times \psi) : (U \cap N) \times (V \cap N) \to \mathbb{R}_{n+m}$$

on moniston $M \times N$ karttakuvaus. Sen käänteiskuvaus eli vastaava lokaali parametrisointi on $(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) = \varphi^{-1} \times \psi^{-1} : \mathbb{R}_{n+m} \to \mathbb{R}_{n+m}$, ja tietenkin

$$D(\varphi^{-1} \times \psi^{-1})(0) = D\varphi^{-1}(0) \times D\psi^{-1}(0).$$

Siksi

$$T_{(p,q)}(M \times N) = D(\varphi^{-1} \times \psi^{-1})(0)(\mathbb{R}^{m+n}) = D\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^n) \times D\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^m) = T_p(M) \times T_q(N).$$

Absrtrakti versio on helpompi, tulkittiinpa tangenttiavaruus sitten millä tahansa tällä kurssilla esitellyistä 3 tavasta.

1.tapa: Olkoon tangenttivektorit määritelty sivuamispisteessä sileiden polkujen ekvivalenssiluokkina, ekvivalenssina sama derivaatta kartalla.

On ilmeistä, että jos $X = \gamma'(0) \in \mathbb{T}_p(M)$ ja $Y = \delta'(0) \in \mathbb{T}_q(N)$, niin $(\gamma, \delta)'(0)$ on sileän polun derivaatta, siis $\in T_{(p,q)}(M \times N)$. Kuvaus $(X, Y) \to (\gamma, \delta)'(0)$ on lineaarinen ja injektio, siis myös bijektio, koska dimensiot täsmäävät. Siinä on luonnollinen isomorfismi.

2. tapa: Olkoon tangenttivektorit määritelty funktioalgebran $\mathbb{C}^\infty$ derivaatioina sivuamispisteen kohdalla. Derivaatioista ja $Y \in \mathbb{T}_y(N)$ voidaan muodostaa lineaarikuvaus $(X, Y) : \mathbb{C}^\infty(M \times N) \to \mathbb{R}$ asettamalla (rajoittumat oikein tulkiten) $f \mapsto X(f\,\big|_{M\times\{0\}}) + Y(f\,\big|_{\{0\}} \times \{0\})$. Näin sadaan todella derivatio ja haluttu luonnollinen isomorfismi. Tod: Riittää tutkia tapaus, jossa monistot ovat lineariavaruuksia, $p = 0$, $q = 0$ ja kakkki kuvaukset ovat lineaarisia! (En ole vielä tseokannut, että on helppoa, mutta on varmaan!)

3. *Olkoon $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Laske eksplisiittisesti kertolaskun tangenttikuvaus*

$$d_e\mu : T_eG \times T_eG \to T_eG$$

missä siis $\mu : G \times G \to G$ on ryhmän kertolasku $G = \mathrm{GL}(2, R)$ eli matriisitulo.

Ratkaisu: Tangenttiavaruus on $\mathbb{R}_{2\times2}$. Matriisitulo on kuvaus $\mathbb{R}_{2\times2} \times \mathbb{R}_{2\times2} \to \mathbb{R}_{2\times2}$, joten sillä on 4 komponenttia ja 8 reaalimuuttujaa, siis yhteensä 32 osittaisderivaattaa, jotka muodostavat sen derivaatan matriisin $\in \mathbb{R}_{8\times4}$. Lasketaan yleisen komponentin mielivaltainen osittaisderivaatta

$$\frac{\partial(AB)_{ij}}{\partial A_{kl}} = \frac{\partial}{\partial A_{kl}} \sum_\mu A_{i\mu}B_{\mu j} = \sum_\mu \frac{\partial A_{i\mu}}{\partial A_{kl}} B_{\mu j} = \sum_\mu \delta_{ik}\delta_{\mu l}B_{\mu j} = \delta_{ik}B_{lj}.$$

Vastaavasti lasketaan

$$\frac{\partial(AB)_{ij}}{\partial B_{kl}}.$$

Huomataan, että koordinateissa laskeminen oli tosin helppoa, mutta tarpeetonta. Tutkittava kertolaskuhan on tunnetun bilineaarikuvauksen rajoittuma tulomonistoon $G \times G$. Bilineaarikuvauksen $\beta : U \times V \to W$ derivaatta kohdassa $(a, b) \in U \times W$ on aina lineaarikuvuas $d\beta_{(a,b)} : U \times V \to W : (x, y) \mapsto \beta(a, y) + \beta(x, b)$. Tämä lauseke periytyy tietysti rajoittumallekin, joten derivaattra kohdassa (A, B) on kuvaus

$$d(\mathrm{tulo})_{(A,B)}(C, D) = AC + BD.$$

Tämän komponentit ovat tasan yllä lasketut.

4. *Olkoot A ja $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvauksia ja (A_{ij}) ja B_{ij} niiden matriisit joissain kannoissa. Määritellään niiden tensoritulo $A \otimes B : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ antamalla kantavektoreille kuvat $(A \otimes B)(e_i \otimes f_j) = Ae_i \otimes Bf_j$ ja jatkamalla lineaarisesti. Määrää kuvauksen $A \otimes B$ matriisi.*

Ratkaisu: Helppoa! Kantavektorien kuvathan on annettu ja matriisi muodostuu juuri niistä. Kirjoitetaan matriisit eksplisiittisesti: Avaruuden $\mathbb{R}^9 = \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ kantavektorit olkoot numeroidut järjestyksessä

$$e_1 \otimes e_1, \quad e_1 \otimes e_2, \quad e_1 \otimes e_3, \quad e_2 \otimes e_1, \quad e_2 \otimes e_2, \quad \dots \quad , e_3 \otimes e_3$$

Siitä sitten vain matriisia laskemaan. Siihen tulevat alkuperäisten matriisielementtien kaikki tulot. (Ns. Kroneckerin tulo matriiseista.)

5. *Miksi edellinen kuvaus $A \otimes B$ ei riipu kantojen valinnasta?*

Ratkaisu: Vielä helpompaa: Lineaarikuvaus määräytyy aina kannoista juuri näin.

6. *Miten määrittelisit kuvauksen $A \otimes B$, jos käytössäsi olisi ainoastaan tensoritulon abstrakti määritelmä universaaliominaisuuden avulla, mutta ei tietoa kannoista.*

Ratkaisu: Aivan helppoa tämäkin. Abstrahoidaan aluksi hieman korvaamalla avaruus$\mathbb{R}^3$ mielivaltaisilla vektoriavaruuksilla eri kohdissa eli olettamalla vain, että $A : V \to V'$ ja $B : W \to W'$ ovat lineaarikuvuksia. Muodostetaan bilineaarikuvaus

$$\beta : E \times F \to E' \otimes F' : (x, y) \mapsto Ax \otimes By.$$

Tensoritulon määritelmän mukaan on olemassa lineaarikuvaus

$$L : E \otimes F \to E' \otimes F' \text{ siten, että } \beta = L \circ \otimes,$$

missä $\otimes$ on tensoritulo $E \times F \overset{\otimes}{\to} E \otimes F$. Tämä lineaarikuvaus L kelpaa lineaarikuvauksen $A \otimes B$ rooliin!

Lopuksi

7. *Vastaava tehtävä ulkoiselle eli kiilatulolle:*

Ratkaisu: Tehtävä ratkaistaan universaaliominaisuuden avulla kuten edellinen, korvataan vain tensorimerkki kiilalla.

8. Miksi derivaatio sovellettuna vakiofunktioon on 0? Ratkaisu: Sovelletaan derivaatiota vakiofunktioon 1: $d(1) = d(1 \cdot 1) = 1 \cdot d1 + d1 \cdot 1 = 2d1$, joten $d1 = 0$. Mielivaltaiselle vakiofunktilla on siis lineaarisuuden nojalla $dC = d(C \cdot 1) = Cd1 = 0$.