JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

**Lineaariset Lien ryhmät** **20.2.2012 / Ratkaisu 5**
**D 381 klo. 16-18.**

## Laskuharjoituksia

**1.** *Määrää kuvauksen $f : M_{n\times n} \to M_{n\times n} : A \mapsto A^2$ derivaatta kohdassa $X \in M_{n\times n}$.*
Ratkaisu: $f : M_{n\times n} \to M_{n\times n} : A \mapsto A^2$ on yhdistetty kuvaus

$$\begin{array}{ccccccc} f: & M_{n\times n} & \xrightarrow{h} & M_{n\times n}\times M_{n\times n} & \xrightarrow{g} & M_{n\times n} \\ & A & \mapsto & (A,A) & \mapsto & A^2. \end{array}$$

Koska kuvaus $h : A \mapsto (A, A)$ on lineaarinen, sen derivaatta on jokaisessa kohdassa se itse. Jälkimmäinen kuvaus $g$ on matriisitulo, siis bilineaarikuvaus $g : (A, B) \mapsto AB$, joten sen derivaatta laskettiin viime kerralla. Ketjusääntö sanoo yleisesti

$$D(g \circ h)(x) = Dg(h(x)) \circ Dh(x),$$

joten tehtävän tilanteessa
$Df(A)(X) = D(g\circ h)(A)(X) = (Dg(h(A)\circ Dh(A))(X) = (Dg(A, A)\circ(Dh(A)))(X)$
$= (Dg(h(A)\circ Dh(A))(X) = Dg(A, A)(X, X) = AX + AX = 2AX$

**2.** *Olkoon $A \in M_{n\times n}$. Laske kuvauksen $f : \mathbb{R} \to M_{n\times n} : t \mapsto e^{tA}$ derivaatta kohdassa $t \in \mathbb{R}$. (Vastaus on $Ae^{tA}$. Siis mikä lineaarikuvaus?)*
Ratkaisu: Koska kyseessä on reaalimuuttujan funktio eli polku, voidaan derivaatta (ensin) tulkita erotusosamäärän raja-arvoksi eli nopeusvektoriksi. Erotusosamäärä on

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{tA+hA} - e^{tA}}{h} \overset{\text{kommutoivat}}{=} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} = e^{tA}\frac{e^{hA} - \mathbf{1}}{h}.$$

Riittää siis osoittaa, että $\frac{e^{hA}-\mathbf{1}}{h} \to A$.
Lasketaan:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \tfrac{e^{hA}-\mathbf{1}}{h} &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}(hA)^k - \mathbf{1}\Big) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k!}(hA)^k\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}(hA + \tfrac{1}{2!}(hA)^2 + \tfrac{1}{3!}(hA)^3 + \dots) \\ &= \lim_{h\to 0}(A + \tfrac{1}{2!}hA^2 + \tfrac{1}{3!}h^2A^3 + \dots) \\ &= \lim_{h\to 0}(A + h(\tfrac{1}{2!}A^2 + \tfrac{1}{3!}hA^3 + \tfrac{1}{4!}h^2A^4 + \dots)) = A, \end{aligned}$$

sillä $h \to 0$ ja summa $\frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}hA^3 + \frac{1}{4!}h^2A^4 + \dots$ suppenee itseisesti ja pysyy vielä rajoitettunakin kaikilla $0 < h < 1$, koska

$$\tfrac{1}{2!}\|A\|^2 + \tfrac{1}{3!}h\|A\|^3 + \tfrac{1}{4!}h^2\|A\|^4 + \dots \le \tfrac{1}{2!}\|A\|^2 + \tfrac{1}{3!}\|A\|^3 + \tfrac{1}{4!}\|A\|^4 + \dots < e^{\|A\|}$$

Lineaarikuvaukseksi tulkittuna derivaatta on tietenkin kuvaus

$$\mathbb{R} \to M_{n\times n} : s \mapsto sAe^{tA}.$$

**3.** *Ortogonaaliryhmien* $\mathrm{O}(3)$ *ja* $\mathrm{SO}(3)$ *yhteinen tangenttiavaruus kohdassa* $\mathbf{1}$ *eli Lien algebra on* $\mathfrak{so}(3) = \{X \in M_{3\times 3} \mid X + X^T = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.
*Tämän virittävät esimerkiksi kantavektorit*
$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ja* $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Laske kaikki näiden keskinäiset Lien sulkeet ja osoita siten, että* $\mathfrak{so}(3)$ *sisältää alkioidensa Lien sulkeet, kuten Lien algebran kuuluukin.*

*Jos vielä huvittaa, huomaa, että* $\mathfrak{so}(3) = \{X \in M_{3\times 3} \mid X^T = -X\}$ *ja todista tästä suoraan, että* $X, Y \in \mathfrak{so}(3) \implies [X,Y] - [Y,X] \in \mathfrak{so}(3)$.

Ratkaisu: a) triviaali b) ei huvittanut.

**4.** *Todista, että kaikille* $X, Y \in M_{n\times n}$ *on* $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$.

*Vihje:*

$$\begin{gathered} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} + \cdots + x_{1n}y_{n1} \\ x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} + \cdots + x_{2n}y_{n2} \\ \vdots \\ x_{n1}y_{1n} + x_{n2}y_{2n} + \cdots + x_{nn}y_{nn} \end{gathered}$$

Ratkaisu: Vihjeessä on lueteltu matriisin $XY$ lävistäjäalkiot, ovathan ne luvut $\sum_{k=1}^n x_{ik}y_{ki}$, missä $i = 1, 2 \ldots n$. Vihjeen lukujen summa on siis $\mathrm{Tr}(XY)$. Toisaalta $\mathrm{Tr}(YX)$ muodostuu luvuista

$$\sum_{k=1}^n y_{ik}x_{ki} = \sum_{k=1}^n x_{ki}y_{ik},$$

missä $i = 1, 2 \ldots n$. Nämä köytyvät vihjeen srakkeista. Väite on tosi!. Todistuksen voi tietenkin kirjoittaa myös hyvin lyhyesti:

$$\mathrm{Tr}\,XY = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ik}y_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n y_{ki}x_{ik} = \mathrm{Tr}\,YX.$$

**5.** *Lue liite 1. Kommentoi sitä parilla rivillä.*

Ratkaisu:

**6.** *Lue liite 2. Kommentoi sitä parilla rivillä.*

## Lien sulkeet ja polkujen kommutaattori

*Olen sanonut "kommutaattoriksi" milloin mitäkin suuretta, mm Lien sulkeita. Tämän puhetavan taustalla on seuraava tarkastelu: Määritellään ensin kommutaattorikäsite* **ryhmässä***: Määr: Ryhmän* $G$ *alkioiden* $g$ *ja* $h$ kommutaattori *on*

$$ghg^{-1}h^{-1}.$$

*Polkujen* $g$ *ja* $h : [a,b] \to G$ kommutaattori *on*

$$[a,b]^2 \to G : \; (s,t) \mapsto g(s)h(t)g(s)^{-1}h(t)^{-1}.$$

Ratkaisu:

**7.** *Olkoot $A$ ja $B : [a,b] \to \mathrm{GL}(n) = G$ (mikä tahansa muukin metriisiryhmistämme kelpaa) kahdesti differentoituvia polkuja, joilla $A(0) = B(0) = \mathbf{1}$ ja olkoot $X = A'(0)$ ja $Y = B'(0)$. Kiinnitetään muuttuja $s$ ja tarkastellaan (osittais)kuvausta*

$$D_s : t \mapsto A(s)B(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1}.$$

*Laske (osittais)derivaatta*

$$\frac{\partial}{\partial t} D_s(t) = D_s'(t)$$

*ja osoita, että*

$$D_s'(0) = A(s)YA(s)^{-1} - Y.$$

Ratkaisu: Osittaiskuvaus $D_s$ on yhdistetty kuvaus

$$t \overset{B}{\mapsto} B(t) \overset{k}{\mapsto} (B(t), B^{-1}(t)) \overset{\beta}{\mapsto} A(s)B(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1},$$

joten ketjusäännön, komponenttien derivaatan, kääntämisen derivaatan ja bilineaarikuvauksen $\beta$ derivaatan sääntöjen mukaan:

$$\begin{aligned}
dD_s(t)(x) &= ((D\beta(k(B(t))) \circ (Dk)(B(t)) \circ (DB)(t))(x) \\
&= ((D\beta(B(t), B^{-1}(t)) \circ (Dk)(B(t)) \circ (DB)(t))(x) \\
&= ((D\beta(B(t), B^{-1}(t))\big(B'(t) \cdot x, -B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1} \cdot x\big) \\
&\overset{\text{lin}}{=} ((D\beta(B(t), B^{-1}(t))\big(B'(t), -B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1}\big) \cdot x \\
&= \beta(B(t), -B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1}) + \beta(B'(t), B^{-1}(t)) \cdot x \\
&= \big(A(s)B(t)A(s)^{-1}(-B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1}) + A(s)B'(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1}\big) \cdot x \\
&= \big( - A(s)B(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1} + A(s)B'(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1}\big) \cdot x
\end{aligned}$$

Matriisina siis

$$dD_s(t) = -A(s)B(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1}B'(t)B(t)^{-1} + A(s)B'(t)A(s)^{-1}B(t)^{-1}.$$

Erityisesti

$$dD_s(0) = -B'(0) + A(s)B'(0)A(s)^{-1} = A(s)YA(s)^{-1} - Y.$$

Saman voi kirjoittaa ja laskea lyhemminkin; tässähän mentiin periaatteen vuoksi aaivan juuria myöten.

**8.** *(jatkoa) $D_s'(0)$ kuuluu tangenttiavaruuteen $T_{\mathbf{1}}G$, joten kuvaus*

$$E : s \mapsto D_s'(0)$$

*on differentioituava polku avaruudessa $T_{\mathbf{1}}G$. Laske sen derivaatta eli nopeus kohdassa $s = 0$. (Tulos on $XY - YX$ ja kuuluu avaruuteen $T_{\mathbf{1}}G$).*

Ratkaisu: On derivoitava kuvaus

$$E : s \mapsto A(s)YA(s)^{-1} - Y$$

kohdassa $s = 0$. Vakion derivaatta on 0, joten derivoitavaaksi jää $\mapsto A(s)YA(s)^{-1}$. Sen derivaatta kohdassa $s = 0$ on laskettu luennolla olevan

$$\frac{\partial}{\partial s} E(0) = [A'(0), Y] \quad (= [X, Y]).$$

mutta toistetaan lasku tässä käyttäen muistisääntöversiota bilineaarikuvauksen, tässä matriisitulon derivointikaavsta ja matriisin kääntämisen derivaatasta kohdassa **1**

$$\begin{aligned}
E(s) &= A(s)YA(s)^{-1} \\
E'(s) &= A'(s)YA(s)^{-1} + A(s)Y(-1)A'(s) \\
E'(0) &= A'(0)YA(0)^{-1} - A(0)YX = [X, Y].
\end{aligned}$$