JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **13.2.2012 / Ratkaisu 4**
D 355 klo. 8-10 ja D 381 klo. 16-18.

1. *Havainnollista seuraavalla tavalla itsellesi ja yleisöllesi, että* SO(3)*:n keskus on pelkkä identtinen kierto:*

a) Ota käteesi kirja. Pidä sitä vaakasuorassa. Ota huoneessa käyttöön koordinaatisto, jossa origo on kirjan keskipiste, kirjan selkä on y-akselin suuntainen, kirjan kannen normaali z-akselin suuntainen ja kirjan alareuna siis x-akselin suuntainen — tavalliseen tapaan. Kiinnitä sitten mielessäsi koordinaatisto avaruuteen, älä kirjaan. Merkitään seuraavassa X_ϕ*:llä kiertoa x-akselin ympäri kulman* ϕ *verran, vastaavasti määritellään* Y_ϕ *ja* Z_ϕ*. Merkitsemme kulmia asteina. Tee harjoitusmielessä kirjalle (joka kerta samasta alkutilasta lähtien) kierrot* X_{45}, X_{90}*,* Y_{60} *ja* Z_{270}*. Jos haluat, voit harjoitela lisää tekemällä kaikki nämä peräkkäin eli kierron* $Z_{270} \circ Y_{60} \circ X_{90} \circ X_{45}$*, jossa siis ensimmäiset kkaksi ovat x-akselin ympäri — näinhän kuvauksien yhdistämistä on tapana merkitä. Nyt osaat.*

Tee kierrot $X_{90} \circ Z_{180}$ *ja* $Z_{180} \circ X_{90}$*. Ei saisi tulla sama!*

b) Totea, että mikään kierto X_ϕ *ei kommutoi kierron* Z_{180} *kanssa, paitsi* X_{180} *.*

c) Keksi jokin kierto, joka ei kommutoi kierron X_{180} *kanssa.*

d) Oletko valmis?

Ratkaisu: Olen.

2. *Etsitään maksimaallinen torus ortogonaaliryhmään* $\mathrm{O}(n)$*: Osoita, että* $\mathrm{O}(n)$*:n maksimaalinen torus sisältyy ryhmään* $\mathrm{SO}(n)$ *ja on siis* $\mathrm{SO}(n)$*:n maksimalinen torus.*

Ratkaisu: Olkoon $\mathbb{T} \subset \mathrm{O}(n)$ torus ja $A \in \mathbb{T}$. Osoitetaan, että $\det A = 1$. Torus on aliryhmä, joten $\mathbf{1} \in \mathbb{T}$. Selvästi torus on polkuyhtenäinen, joten on olemassa polku A:sta ykköseen $\mathbf{1}$. Tällä polulla kuvaus det on jatkuva, mutta koska polku$\subset$ torus$\subset$ $\mathrm{O}(n)$, niin det voi saada vain arvot ± 1 ja on siis vakio, nimittäin vakio $\det \mathbf{1} = 1$.

3. *Osoita, että jos ryhmän* G *ainoa* **epätriviaali** *normaali aliryhmä on sen keskus* $Z = \mathbf{Z}(G)$*, niin tekijäryhmä* G/Z *on yksinkertainen.*

Ratkaisu: Vastaoletus: G/Z:lla on sittenkin epätriviaali normaali aliryhmä

$$\{1\} \subsetneq H \subsetneq G/Z.$$

Merkitään kanonista surjektiota $\varphi : G \to G/Z : g \mapsto g + Z$.

Osoitetaan, että yleensäkin homomorfismissa normaalin aliryhmän alkukuva $\varphi^{-1}H \subset G$ on normaali aliryhmä: Tietenkin aliryhmän alkukuva homomorfismissa on aliryhmä. Lisäksi kaikilla $g \in G$ pätee

$$\begin{aligned} g(\varphi^{-1}H)g^{-1} &\subset (\varphi^{-1}(\varphi g))(\varphi^{-1}H)(\varphi^{-1}(\varphi g^{-1})) \\ &\subset \varphi^{-1}\left((\varphi g)H(\varphi g^{-1})\right) \\ &= \varphi^{-1}\left((\varphi g)H(\varphi g)^{-1}\right) \\ &\subset \varphi^{-1}H, \text{ selvä.} \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan siis $\varphi^{-1}H = Z$. Siis $\{\mathbf{1}_{G/Z}\} = \varphi(Z) = \varphi(\varphi^{-1}H) = H$.

4. *Kierroksen 3 harjoitustehtävissä 6 osoitettiin, että matriisiryhmän G ykkösalkion sisältävä polkuyhtenäinen komponentti H on aliryhmä. Osoita, että $GHG^{-1} \subset H$ eli H on jopa normaali aliryhmä.*

Ratkaisu: Olkoon $h \in H$ ja $g \in G$. Valitaan H:ssa (riittää: G:ssä) polku $t \mapsto \psi(t)$ ykkösestä h:hon. Silloin $t \mapsto g\psi(t)g^{-1}$ on G:ssä polku ykkösestä ghg^{-1}:hon, joka siis kuuluu komponenttiin H.

5. *Schreierin lauseen todistuksessa oletettiin ainoastaan, että H on* täysin epäyhtenäinen *eli etttä mistään sen alkiosta ei ole polkua mihinkään muuhun. On siis itse asiassa todistettu, että jos G on polkuyhtenäinen ja sen aliryhmä H täysin epäyhtenäinen, niin $H \subset \mathbf{Z}(G)$. Tästä esimerkkinä ovat kaikki aikaisemmassa harjoituksessa esiintyneet* $\mathrm{SO}(2)$*:n äärettömät aliryhmät (rationaaliset kierrot ja irrationaalisen kierron monikerrat). Nämä ovat lisäksi normaaleja* **ja tiheitä** *aliryhmiä, mutta se on pikemminkin yhteensattuma kuin sääntö:*

Miksi yksikään $\mathrm{SO}(n)$*:n aliryhmä ei ole sekä normaali,* **tiheä** *että täydellisesti epäyhtenäinen, kun $n \geq 3$?*

Ratkaisu: $\mathrm{SO}(n)$ on polkuyhtenäinen. Jos siis sen aliryhmä H täysin epäyhtenäinen, niin edellä sanotun nojalla $H \subset \mathbf{Z}(\mathrm{SO}(n))$. Mutta $\mathbf{Z}(\mathrm{SO}(n))$ tunnetaan, eikä se ole tiheä (ellei $n \leq 2$) , joten H ei voi olla tiheä.

6. *Mitkä seuraavista väitteistä ovat aina tosia, kun $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$? (Tässä $n \geq 2$)*
a) $e^{2A} = (e^A)^2$.
b) $e^{A+B} = e^A e^B$ *kaikilla* $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \implies A = \lambda\mathbf{1}$*, missä* $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) $e^{A+B} = e^A e^B$ *kaikilla* $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \impliedby A$ *on diagonalisoituva.*
d) $e^{A+B} = e^A e^B$ *kaikilla* $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \iff A \in \mathbf{Z}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$.

Ratkaisu:

a) OK. Kommutoivat!

b) Totta on (kai). Todistus riippuu löytämästäni lemmasta, jota en osaa todistaa. Varmaan on olemassa suorakin todistus, kunhan keksin/keksimme sopivat matriisit B, jotka tekevät A:sta halutunlaisen. Tässä tämä huono todistus:

WIKIPEDIA: (matrix exponential function) ketoo. The converse (to $XY = YX \implies e^X + e^Y = e^X e^Y$) is false: the equation $e^X + e^Y = e^X e^Y$ does not necessarily imply that X and Y commute. **However, the converse is true if $X$and Y contain only algebraic numbers** and their size is at least 2×2 (Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. (1991), Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-46713-1, pp. 435–437). Mahdolliset vastaesimerkkimatriisit sisältävät siis kumpikin transkendenttilukuja. Koska toisen transkendenttisuus ei riitä, niin
$e^{A+B} = e^A e^B$ kaikilla $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \implies e^{A+B} = e^A e^B$ kaikilla algebrallisilla $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \implies AB = BA$ kaikilla algebrallisilla $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \implies AB = BA$ kaikilla $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, koska algebralliset luvut ovat tiheässä ja matriisilaskutoimitukset jatkuvia.

Siis $A \in \mathbf{Z}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$, joka on helposti todettavissa joukoksi $\{A = \lambda\mathbf{1} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

c) Ei. Vastaesimerkki $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$e^A = \exp(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(Diagonaalimatriisi exponentioidaan aina diagonaalitermeittäin.)
$e^B = \exp(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \mathbf{1} + B + B^2/2 + \cdots = 1 + B + 0 = 1 + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(Nilpotentin matriisin (jolla siis $B^n = 0$) exp on aina polynomi matriisista B.)
$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nämä eroavat toisistaan, joten ainakin toinen eroaa matriisista e^{A+B}. Väitteessä sanottiin (teinpä vaikean.), että sen pitää olla nimenomaan $e^A e^B$. Täytyy siis laskea myös e^{A+B}.

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (A+B)$, joten $(A+B)^n = (A+B)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
$e^{A+B} = \mathbf{1} + (A+B) + (A+B)^2/2 + \cdots = \mathbf{1} + (A+B)(1 + 1/2 + 1/3! + 1/4! + \dots) =$
$\mathbf{1} + e(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, joka ei ole kumpikaan.

d) Totta on. Perustelu: $A \in \mathbf{Z}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \iff AB = BA$ kaikilla $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \implies e^{A+B} = e^A e^B$ kaikilla $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ja toiseen suuntaan väite on kohta b).

7. *Osoita, että kvaternioiden eksponenttifunktio kuvaa avaruuden $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ 1-ulotteisen aliavaruuden eli origon kautta kulkevan suoran $s \subset \mathbb{R}^3$ ympyräksi. Määrää sen säde.*

Ratkaisu: 1. tapa: Valitaan suoralta $s \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \subset \mathbb{H}$ (imaginaarinen) yksikkökvaternio u, jolloin $s =< u >= \mathbb{R}u$. Koska imaginaariselle yksikkökvaterniolle pätee $u^2 = -1$, on helppoa laskea sarjasta, että kaikilla $\theta \in \mathbb{R}$ on $\exp u = \cos\theta + u \sin\theta$. Vektorit 1 ja $u \in < i, j, k >$ ovat ortogonaaliset ja ykkösen pituiset, joten ne ovat ortonormaali koordinaatisto virittämässään 2-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Näin ollen parametrisoitu käyrä $\mathbb{R} \to \mathbb{H} : t \mapsto \exp u = \cos\theta + u \sin\theta$ kuvaa reaaliluvut 1-säteiseksi ympyräksi. Tämä on tietenkin suoran s kuvajoukko.

2. tapa: Valitaan suoralta $s \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \subset \mathbb{H}$ yksikkökvaternio u, jolloin kuvaus

$$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{H} : x + yi \mapsto x + yu$$

on isometrinen (siis erityisesti myös injektiivinen) rengashomomorfismi eli upottaa kunnan $\mathbb{C}$ alikunnaksi ja metrisen avaruuden osajoukoksi vinokuntaan/metriseen avaruuteen $\mathbb{H}$. Se kuvaa siis 1-ympyrän 1-säteiseksi origokeskiseksi ympyräksi. Osoitetaan, että tämä on etsitty kuvajoukko. Eksponenttifunktion sarja määrittelee kvaternioiden eksponenttifunktion $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q \mapsto e^q$. Sama sarja määrittelee kompleksisen eksponettifunktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto e^z$. Siksi kaikilla $z \in \mathbb{C}$ on

$$\psi \exp(z) = \psi(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k) = \lim_{n\to\infty} (\psi \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (\psi z)^k = \exp(\psi(z))$$

Selvästi kuvaukset $s \to \mathbb{H} : tu \mapsto \exp(tu)$ ja
$tu \mapsto ti \mapsto \exp(ti) \mapsto \psi(\exp(ti)) = \exp(\psi(ti)) = \exp tu$ ovat siis sama kuvaus. Jälkimmäisen kuvajoukko on ympyrämme!

8. *Miksi* $e^{\mathbf{i}\pi/2} = \mathbf{i}$ *ja* $e^{\mathbf{j}\pi/2} = \mathbf{j}$*?*
Seuraus: $e^{\mathbf{i}\pi/2} e^{\mathbf{j}\pi/2} \neq e^{\mathbf{j}\pi/2} e^{\mathbf{i}\pi/2}$*, joten ainakin toinen niistä on* $\neq e^{\mathbf{i}\pi/2+\mathbf{j}\pi/2}$*. Kaava* $e^{a+b} = e^a e^b$ *ei siis päde ainakaan kaikille kvaternioille* a, b*. Päteekö se kompleksiluvuille* a, b*?*

Ratkaisu: Seuraa edellisestä tehtävästä, jossa u:n rooliin voidaan ottaa $\mathbf{i}$ tai yhtälailla $\mathbf{j}$. Tietenkin kaava pätee $\mathbb{C}$:ssä, koska luvut kommutoivat.

9. Seuraavassa tehtävässä on pitkä johdanto:

Bilineaarikuvauksen derivaatta

Olkoot V*,* W *ja* U *vektoriavaruuksia ja* $\mathbb{K}$ *niiden kerroinkunta. (Voit olettaa, että* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*.)*
Määritelmä: Kuvaus $B : V \times W \to U$ *on* bilineaarinen*, jos sen kaikki osittaiskuvaukset*

$$B(v, \cdot) : W \to U : w \mapsto B(v, w)$$

ja

$$B(\cdot, w) : V \to U : v \mapsto B(v, w)$$

ovat lineaarisia.

Esimerkkejä: Lähes kaikki lineaarialgebrassa "tuloiksi" sanotut kuvaukset ovat bilineaarikuvauksia. Tarkemmin sanoen ainakin seuraavat ovat bilineaarikuvauksia:

(1) *reaalilukujen tulo* xy
(2) *kompleksilukujen tulo* zz'
(3) *vektorin ja luvun tulo* λv
(4) *vektorien reaalinen sisätulo* $(v|w)$
(5) *matriisitulo* AB*,*
(6) *erityisesti matriisin ja vektorin tulo* Ax
(7) *lineaarikuvauksen arvon laskeminen* Tv*,*
(8) *erityisesti lineaarimuodon eli* $\mathbb{K}$*-arvoisen lineaarikuvauksen arvon laskeminen* $\langle v|u' \rangle$
(9) *funktioiden, erityisesti polynomien pisteittäinen tulo* fg
(10) *vektorien tensoritulo* $x \otimes y$
(11) *lineaarikuvausten tensoritulo* $T \otimes S$

Lineaarikuvaus vektoriavaruudelta toiselle määräytyy yksikäsitteisesti kanta-alkioiden kuvista ja nämä voi valita miten tahansa. Erityisesti äärellisulotteisten avaruuksien välisten lineaarikuvausten esittäminen kannan avulla matriiseina perustuu tähän. Myös bilineaarikuvauksella on sama ominaisuus: bilineaarinen $B : V \times W \to U$ *määräytyy täysin arvoista* $B(k, l)$*, missä* k *läpikäy* V*:n kannan* K *ja* l *läpikäy* W*:n kannan* L*, onhan* $B\left(\sum_K \lambda_k k, \sum_L \mu_l l\right) = \sum_{K\times L} \lambda_k \mu_l kl$*. Näin voidaan muodostaa esimerkkejä bilineaarikuvauksista — itse asiassa tietenkin kaikki äärellisulotteiset esimerkit.*

Olkoon $V = \mathbb{K}[x] = \{f \mid f$ *on* $\mathbb{K}$*-kertoiminen yhden muuttujan polynomi*$\}$. *Tavallinen polynomien kertolasku on* symmetrinen *ts.*$(B(a,b) = B(b,a))$ *bilineaarikuvaus* $V \times V \to V$. *Sama pätee tietenkin useamman muuttujan polynomeille eli avaruudessa* $V = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_d]$.

Yleisemmin, missä tahansa kommutatiivisessa $\mathbb{K}$*-algebrassa* A *sisäinen kertolasku* $A \times A \to A$ *on* $\mathbb{K}$*-bilineaarinen ja symmetrinen; itse asiassa* kommutatiivinen $\mathbb{K}$-algebra *on määritelmän mukaan* $\mathbb{K}$*-vektoriavaruus, jossa lisäksi on annettuna symmetrinen bilineaarikuvaus* $B : A \times A \to A$, *jota sanotaan siäiseksi kertolaskuksi.* [1]

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ *kahden vektorin ristitulo on esimerkki alternoivasta bilineaarikuvauksesta. Perusesimerkki alternoivasta bilineaarikuvauksesta on kuitenkin* 2×2*-matriisin determinantti:*

Olkoon $V = \mathbb{R}^2$. *Kuvaus, joka kahteen vektoriin* $v = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ *ja* $w = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ *liittää determinantin* $B(v,w) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ *on alternoiva bilineaarikuvaus* $V \times V \to \mathbb{R}$.

Bilineaarikuvauksen derivointi. *Bilineaarikuvaukselle* $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ *on yleisesti voimassa derivoimiskaava*[2]*:*

$$\left(d_{(A,B)}B\right)(X,Y) = B(A,Y) + B(X,B).$$

Erityisesti ykkösalkioiden kohdalla — jättäen "turhat" sulkeet merkitsemättä:

$$d_{(I,I)}B(X,Y) = B(I,Y) + B(X,I).$$

Bilineaarikuvauksen tulon kaavasta voi johtaa, että matriisin kääntämisen $k : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ *derivaatta on*

$$d_g k(X) = -g^{-1} X g^{-1}.$$

Erityisesti ykkösalkion $e = I \in G = GL(n, \mathbb{R})$ *kohdalla*

$$d_I k(X) = -X,$$

toisin sanoen matriisin kääntämisen derivaatta kohdassa I *on* -1*:llä kertominen.*

a) Tarkastellaan vektoriavaruudessa $V = M_{2\times 2} = \{2 \times 2$*-matriisit*$\}$ *bilineaarikuvausta* $\beta : V \times V \to V : (A,B) \mapsto AB$, *siis matriisituloa. Sen derivaatta kohdassa* $X = 0, Y = \mathbf{1}$ *on lineaarikuvaus* $V \times V \to V$. *Määrää se.*

b) Tarkastellaan avaruuden $V = M_{2\times 2}$ *avoimessa joukossa (Miksi avoin?)* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) = \{A \in V \mid \det A \neq 0\}$ *määriteltyä kuvausta* $k : A \mapsto A^{-1}$. *Määrää sen suunnattu derivaatta pisteessä* $\mathbf{1} \in \mathrm{GL}(\mathbf{2}, /\mathbf{R})$ *suuntaan* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *joko suoraan laskemalla tai yllä*

---

[1] Yleensäkin, jos bilineaarikuvaus $B : A \times A \to A$ on assosiatiivinen niin $(A, +, B)$ on samalla vektoriavaruus ja rengas, jolloin sanotaan, että A on *assosiatiivinen algebra*. Assosiatiivinen algebra ei aina ole kommutatiivinen eikä *yleinen algebra* eli pelkkä bilineaarikuvaus ole assosiatiivinen. Erityisesti Lien algebra ei ole kumpaakaan.

[2] On Purmosen diff lask 1 monisteessa harjoitustehtävänä! Hyvä kaava. Tämän erikoistapauksena saadaan mm. tunnettu tulon derivoimiskaava.

annetun käänteismatriisin derivaatan kaavan avulla — mieluiten kummallakin tavalla! Ratkaisu: a) Merkitään matriisituloa hetken ajan symbolilla $\times$. Koska matriisitulo on bilineaarinen, on sen derivaatta kohdassa (A, B) annetun kaavan mukaan

$$(d_{(A,B)}\times)(X, Y) = \times(A, Y) + \times(X, B) = AY + XB,$$

Tehtävän pisteessä (MUUTIN NIMET) $(A, B) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ derivaatta on siis siis

$$(d_{(0,1)}\times)(X, Y) = 0Y + X\mathbf{1} = X.$$

b) Samaan tapaan on annetun kaavan mukaan kääntämiskuvauksen k derivaatta ykkösmatriisin kohdalla

$$d_{\mathbf{1}}k(X) = -X.$$

Differentiaalilaskennasta tiedämme, että suunnattu derivatta on derivaatan arvo, kun sille "syötetään" suunnan ilmaiseva yksikkövektori eli suuntavektori. Tehtävän tilantessa suuntavektori on $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ jaettuna pituudellaan, joka on $u = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16} = \sqrt{30}$, joten suunnattu derivatta on

$$\frac{-1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sama pitäisi saada suoraan suunnatun derivaatan määritelmästä derivoimalla komponenteittain polku $t \mapsto k(\mathbf{1} + tu)$ kohdassa $t = 0$. osannet arvioida,kumpi laskutapa on helpompi!