Lien ryhmät
D 381 klo. 16-18.

23.4.2012 / Ratkaisu: 6+4=10

1. *Todista Jacobin identiteetti derivaatioiksi tulkittujen vektorikenttien kommutaattorille.*

Ratkaisu:

Kahden vektorikentän kommutaattori eli *hakatulo* $[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$ on bilineaarinen ja antisymmetrinen. Tehtävänä on todeta, että se toteuttaa myös *Jacobin identiteetin* $[[\xi, \eta], \gamma] + [[\eta, \gamma], \xi] + [[\gamma, \xi], \eta] = 0$.

1. tapa: Määritelmän mukaan saadaan, koska vektorikenttä on lineaarikuvaus:

$$\begin{aligned}[[\xi, \eta], \gamma] &= (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) \circ \gamma - \gamma \circ (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) \\ &= \xi \circ \eta \circ \gamma - \eta \circ \xi \circ \gamma - \gamma \circ \xi \circ \eta + \gamma \circ \eta \circ \xi,\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}&[[\xi, \eta], \gamma] + [[\eta, \gamma], \xi] + [[\gamma, \xi], \eta] \\ &= \xi \circ \eta \circ \gamma - \eta \circ \xi \circ \gamma - \gamma \circ \xi \circ \eta + \gamma \circ \eta \circ \xi \\ &+ \eta \circ \gamma \circ \xi - \gamma \circ \eta \circ \xi - \xi \circ \eta \circ \gamma + \xi \circ \gamma \circ \eta \\ &+ \gamma \circ \xi \circ \eta - \xi \circ \gamma \circ \eta - \eta \circ \gamma \circ \xi + \eta \circ \xi \circ \gamma \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. tapa: Lokaaleissa koordinaateissa sileiden vektorikenttien $\xi_x f = \sum_{j=1}^d \xi_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$ ja $\eta_x f = \sum_{j=1}^d \eta_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$ hakatulo on vektorikenttä, jonka i:s komponentti eli $\frac{\partial}{\partial x_i}$:n kerroin on $\sum_{j=1}^d \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)$. Siis $[[\xi, \eta], \gamma]$ on vektorikenttä, jonka i:s komponentti eli $\frac{\partial}{\partial x_i}$:n kerroin on

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \left(\xi_k \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} - \gamma_j \frac{\partial (\sum_{k=1}^d \left(\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right))}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^d \left(\xi_k \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} - \eta_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} - \gamma_j \frac{\partial (\xi_k \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k})}{\partial x_j} + \gamma_j \frac{\partial (\eta_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k})}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^d \left(\xi_k \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} - \eta_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} - \gamma_j \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \gamma_j \xi_k \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_k \partial x_j} + \gamma_j \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \gamma_j \eta_k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)\end{aligned}$$

Todetaan, että kolmen tällaisen summana - kiertäen $\gamma \to \eta \to \xi$ saadaan 0. Yhteenlaskua helpottaa, kun ryhmitellään samannäköiset termit yhteen siitä toivossa, että ne kumoavat toisensa. Pelkkiä ensimmäisiä derivaattoja sisältävien termien summaksi tulee

$$\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\eta_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\gamma_j\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}+\gamma_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}$$
$$+\eta_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\gamma_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\xi_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}+\xi_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}$$
$$+\gamma_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\eta_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+\eta_j\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}\Big).$$

Poimitaan tästä ne, joiden derivoimaton kerroin on ξ:n komponentti

$$\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\xi_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}+\xi_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\Big)$$
$$=\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\Big)+\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}-\xi_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}\Big)$$
$$=\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\Big)+\sum_{k,j=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}\Big)=0$$

Samalla tavalla käsitellään η- ja γ-kertoimiset termit ja lopuksi toisen asteen derivaat.

2. Määritelmä: *Lien ryhmän (yleisemmin: topologisen ryhmän) G osajoukossa $E \subset G$ määritelty reaaliarvoinen (tai kompleksiarvoinen tms.) funktio $f : E \to \mathbb{R}$ on* vasemmalta tasaisesti jatkuva, *jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa neutraalialkion $e \in G$ ympäristö $V \subset G$ siten, että $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$ kaikilla $x \in E$ ja $y \in E \cap Vx$. Vastaavasti määritellään* oikealta tasaisesti jatkuva *funktio.*

Osoita, että kompaktissa osajoukossa $E \subset G$ jokainen jatkuva funktio on vasemmalta ja oikealta tasaisesti jatkuva.

Ratkaisu: Jäljitellään vastaavaa reaalimuuttujan reaalifunktiota koskevan lauseen todistusta. Ryhmässä siirrot vastaavat alkiolla kertomista. (Keksimisvaiheessa olisi varmaan ollut hyvä käyttää additiivisesti merkittyä abelin ryhmää.) Olkoon $f : E \to \mathbb{R}$ jatkuva kompaktissa osajoukossa $E \subset G$ ja $\epsilon > 0$. Koska f on jatkuva, on jokaisella $z \in E$ avoin ympäristö $U_z \subset G$ siten, että

$$|f(z) - f(y)| \le \epsilon \quad \text{kaikilla } y \in E \cap U_z.$$

Koska alkiolla kertominen on homeomorfismi $G \to G$, niin $U_z = V_z z$ jollekin neutraalialkion avoimelle ympäristölle V_z, nimittäin ympäristölle $V_z = U_z z^{-1}$. **Koska ryhmän kertolasku on jatkuva, on olemassa neutraalialkion e ympäristö W_z siten, että $W_z W_z \subset V_z$, jolloin erityisesti $W_z \subset V_z$.** Ympäristöt $W_z z$ ovat kompaktin joukon E avoin peite, joten jo äärellisen monen yhdiste peittää E:n. Valitaan V:ksi vastaavien äärellisen monen ympäristön $W_j = W_{z_j}$ leikkaus, joka on neutraalialkion ympäristö. Jos nyt $x \in E$ ja $y \in E \cap Vx$, niin

$\exists j \in \{1, \ldots, n\} : x \in W_j z_j$. Tällöin $|f(x) - f(z_j)| \le \epsilon$

$y \in E \cap Vx \subset E \cap W_j x \subset E \cap W_j W_j \subset V_{z_j}$. Tällöin $|f(y) - f(z_j)| \le \epsilon$

Siis $|f(z) - f(y)| \le 2\epsilon \quad$ kaikilla $u \in E \cap U_z$. $\square$

Toinen väite todistetaan vastaavasti.

3. *Osoita, että moduli Δ on jatkuva kuvaus $G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.*
Vihje: Tarkastele sellaista jatkuvaa kompaktikantajaista funktiota $f : G \to \mathbb{R}$, jolla

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = 1.$$

Osoita, että

$$\Delta(g) = \int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x).$$

ja käytä edellisen tehtävän tulosta.

Ratkaisu: Oletuksena on tietenkin, että μ on jonkin Lien ryhmän G Haarin mitta, siis vaseninvariantti, jolloin modulin määritelmän ja f:stä tehdyn oletuksen mukaan

$$\int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x) = \Delta(g) \int_G f(x)\, d\mu(x) = \Delta(g).$$

Siis Δ on kuvaus $g \mapsto \int_G f(xg^{-1})\, \mu$. Oletuksen mukaan f on jatkuva, siis edellisen tehtävän mukaan molemmin puolin tasaisesti jatkuva, joten kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa neutraalialkion $e \in G$ ympäristö $V \subset G$ siten, että $|f(g) - f(h)| \leq \epsilon$ kaikilla $g \in \operatorname{supp} f$ ja $h \in \operatorname{supp} f \cap gV$. Jälkiviisaina huomaamme, että V^{-1} on neutraalialkion ympäristö, koska käänteisalkion muodostaminen on homeomorfismi. Olkoon $g \in \operatorname{supp} f$ ja $h \in \operatorname{supp} f \cap V^{-1}g$

$$\begin{aligned}
|\Delta(g) - \Delta(h)| &= |\int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x) - \int_G f(xh^{-1})\, d\mu(x)| \\
&= |\int_{xg^{-1} \in \operatorname{supp} f} f(xg^{-1})\, d\mu(x) - \int_{xh^{-1} \in \operatorname{supp} f} f(xh^{-1})\, d\mu(x)| \\
&\leq \int_{xg^{-1} \in \operatorname{supp} f \text{ tai } xh^{-1} \in \operatorname{supp} f} |f(xg^{-1}) - f(xh^{-1})|\, d\mu(x) \\
&\leq \int_{x \in g \operatorname{supp} f \cup h \operatorname{supp} f} \epsilon\, d\mu(x),
\end{aligned}$$

sillä $xh^{-1} \in xg^{-1}V$, eli $h^{-1} \in g^{-1}V$, koska oletettiin, että $h \in V^{-1}g$.

Lopuksi huomataan, että

$$\int_{x \in g \operatorname{supp} f \cup h \operatorname{supp} f} \epsilon\, d\mu(x) = \epsilon(\int_{g \operatorname{supp} f} 1\, d\mu(x) + \int_{h \operatorname{supp} f} 1\, d\mu(x)) = 2\epsilon\mu(\operatorname{supp} f).$$

Tämä riittää, sillä $\operatorname{supp} f$ on äärellinen, koska Haarin mitan määritelmässä on vaadittu, että kompatit joukot ovat äärellismittaisia.

4. Osoita, että jos μ on vaseninvariantti (eli Haarin) mitta, niin $\Delta(x^{-1}) d\mu(x)$ on oikeainvariantti mitta.

Ratkaisu: Modulin määritelmän mukaan

$$(1) \quad \Delta(g) \int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x).$$

Vaihtamalla g:n rooliin g^{-1} saadaan

$$(2) \quad \Delta(g^{-1}) \int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_G f(xg)\, d\mu(x).$$

Koska Δ on homomorfismi eli multiplikatiivinen, niin kaikilla g ja $x \in G$ pätee $\Delta(gxg^{-1}) = \Delta(x)$, erityisesti $\Delta(g)\Delta(g^{-1}) = 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_G f(x)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) &= \Delta(g)\left(\Delta(g^{-1})\int_G f(x)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)\right)\\
&\overset{(2)}{=} \Delta(g)\left(\int_G f(xg)\,\Delta((xg)^{-1})\,d\mu(x)\right)\\
&= \Delta(g)\int_G f(xg)\,\Delta(g^{-1}x^{-1})\,d\mu(x)\\
&= \Delta(g)\int_G f(xg)\,\Delta(g^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)\\
&= \Delta(g)\Delta(g^{-1})\int_G f(xg)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)\\
&= \int_G f(xg)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) \quad \square
\end{aligned}
$$

Seuraus Kaikilla $g \in G$ ja kompaktikantajaisilla jatkuvilla funktioilla f on

$$\int_G f(x^{-1})\,d\mu(x) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)$$

Huomataan aluksi, että

$$f \mapsto \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)$$

on vaseninvariantti mitta, minkä näkee heti soveltamalla mitan $\Delta(x^{-1})d\mu(x)$ oikeainvarianssia funktioon $\varphi(x) = f(x^{-1})$, jolloin saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_G \varphi(xg)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) &= \int_G \varphi(x)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)\\
\text{eli}\quad \int_G f(g^{-1}x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) &= \int_G f(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x).
\end{aligned}
$$

Koska vaseninvariantit eli Haarin mitat eroavat toisistaan vain vakiokertoimella, on siis olemassa luku $C > 0$, jolla

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) = C\int_G f(x)\,d\mu(x).$$

Soveltamalla tätä valiten f:n rooliin vasemman puolen integroitavan funktion $\psi(x) = f(x^{-1})\Delta(x^{-1})$ saa, huomaten aluksi, että $1 = \Delta(x)\Delta(x^{-1})$:

$$\int_G f(x)\,d\mu(x) = \int_G f(x)\Delta(x)\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) = C\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x),$$

$$\text{siis } C\int_G f(x)\,d\mu(x) = C^2\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x),$$

$$\text{mutta } C\int_G f(x)\,d\mu(x) = \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x),$$

joten $C = 1$.

5. *Osoita, että sarakevektoreille $X, Y \in \mathbb{R}^2$ ja 2×2-neliömatriisille A pätee* $\det[AX, AY] = \det A \det[X, Y]$. *Huomaa ettei hakasulku tässä ole Lien algebran laskutoimitus, vaan matriisisulkeet sarakkeiden ympärillä.*

Ratkaisu: Koska matriisi ikerrotaan sarakkeittain, niin Helppo: $\det[AX, AY] = \det(A[X, Y]) = \det A \det[X, Y]$.

6. *Luentotekstissä (1.30 c)?) on tarkasteltu tason $M = \mathbb{R}^2$ 1-muotoa*

$$\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2,$$

jolle tavallisessa kannassa on tangenttivektorille $X = (a, b)$ pisteessä $p = (x, y)$

$$\begin{aligned}\omega_p(X) &= x_2(-dx_1)_p(a, b) + x_1(dx_2)_p(a, b) = -x_2 a + x_1 b = x_1 b - x_2 a\\ &= \det\begin{bmatrix} x_1 & a \\ x_2 & b\end{bmatrix} = \det[p, X].\end{aligned}$$

Differentiaalimuodolla ω on rajoittuma alimonistoon $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$, joten ω antaa yksiulotteisen "tilavuusmuodon" yksikköympyrälle. Yllä laskettiin juuri, että pisteittäin $\omega_p(X) = \det[p, X]$. Tästä voi päätellä, että ω on rotaatioinvariantti *eli* invariantti ryhmän $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ suhteen*, toisin sanoen*

$$F^*\omega = \omega \textit{ kaikilla } F \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

sillä lineaarikuvaus $F \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ on itsensä derivaatta, joten jokaisessa pisteessä p on edellisen tehtävän mukaan — huomaten taas, että [ ] ovat matriisisulkeita:

$$\begin{aligned}(F^*\omega)_p(X) &= \omega_{F(p)}((DF)_p(X)) = \det[F(p), (DF)_p(X)]\\ &= \det[F(p), F(X)] = \det[p, X] = \omega_p(X).\end{aligned}$$

Ryhmä $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ kuvaa tietenkin ympyrän itselleen, joten on mielekästä ja edellä lasketun mukaan myös totta, että myös ω:n rajoittuma ympyrälle on invariantti ryhmän $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ suhteen. Ympyrä on yksiulotteinen, joten 1-muoto ω määrittelee ympyrällä mitan $|\omega|$, joka edellä sanotun mukaan on invariantti ryhmän $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ suhteen ja tietenkin myös peilausten suhteen, siis koko ortogonaaliryhmän $\mathrm{O}(2)$ suhteen.

Todista, että $|\omega|$ on vakiokerrointa vaille sama asia kuin kaarenpituus.

Ratkaisu: Teoria tekee ongelman triviaaliksi: Kumpikin on Haarin mitta tason kiertojen ryhmässä $\mathbb{S}_1$.

7. *(Jatkoa)*

Osoita, että koko ympyrän $|\omega|$-mitta on 2π, joten ympyrän $\mathbb{S}_1$ normeerattu Haarin mitta on $\frac{1}{2\pi}|\omega|$. Ratkaisu: Lasketaan koordinaateissa ja ratkaistaan samalla edellinenkin tehtävä uudelleen ilman Haarin mitan yksikäsitteisyyttä. Melkein koko ympyrän kattaa karttakuvaus

$$\varphi :]0, 2\pi[\to \mathbb{S}_2 : (x, y) \mapsto \varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

Helpotetaan merkintöjä:

$$\omega = -ydx + xdy \in T^*S_1.$$

dx on kuvauksen $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos t$ derivaatta, siis $dx_t(a) = -\sin t \cdot a$ eli $dx_t = -\sin t\, dt$. Vastaavasti dy on kuvauksen $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \sin t$ derivaatta, siis $dy_t(a) = \cos t \cdot a$ eli $dy_t = \cos t\, dt$. Kaiken kaikkiaan siis $\omega = -y\, dx + x\, dy = \sin^2 t\, dt + \cos^2 t\, dt = (\sin^2 + \cos^2 t)\, dt$. Tässä koordinaatistossa siis $\omega = 1dt$, joten $|\omega| = 1$. Koko karttapalan mitaksi tulee siten $\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$. Tämä on saman tien koko ympyrän mitta, sillä toinen kartta peittää vain yhden lisäpisteen.

8. *Konstruoi differentiaalimuotojen avulla rotaatioinvariantti mitta pallolle $\mathbb{S}_2$. Laske eksplisiittisesti auki.*

Ratkaisu: Luentotekstissä on esimerkkinä 1.30 c) rotaatioinvariantti mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tapaukseen $n = 3$ sovitettuna se on

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, x_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2.$$

Tässä ω siis on $n-1 = 2$ -muoto. Selvästi

$$\begin{aligned}
\omega_x(X,Y) &= x_1\, dx_2 \wedge dx_3(X,Y) - x_2\, dx_1 \wedge dx_3(X,Y) + x_3\, dx_1 \wedge dx_2(X,Y) \\
&= x_1 \begin{vmatrix} dx_2(X) & dx_3(X) \\ dx_2(Y) & dx_3(Y) \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} dx_1(X) & dx_3(X) \\ dx_1(Y) & dx_3(Y) \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} dx_1(X) & dx_2(X) \\ dx_1(Y) & dx_2(Y) \end{vmatrix} \\
&= \det[x, X, Y], \quad (= \text{"vektorikolmitulo"}\ x \cdot X \times Y)
\end{aligned}$$

joka ω on rotaatioinvariantti, ja siis myös sen rajoittuma yksikköpalloon S_{n-1} on rotaatioinvariantti. Pallolle rajoitettu mitta $|\omega|$ on etsitty rotaatioinvariantti mitta.

Lasketaan pallon koordinaateissa $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,,\ \beta \in]-\pi, \pi[$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sin\alpha \\
x_2 &= \cos\alpha \sin\beta \\
x_3 &= \cos\alpha \cos\beta
\end{aligned}$$

eli lokaalissa parametrisoinnissa

$$x = F(\alpha,\beta) = (\sin\alpha, \cos\alpha\sin\beta, \cos\alpha\cos\beta),$$

jonka tangenttikuvaus on lineaarikuvaus, jonka matriisi (F:n Jacobin matriisi) on

$$(DF)_{(\alpha,\beta)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \right).$$

Siirretään 2-muoto kartalle: Olkoot A ja B tangenttivektoreita kartalla $\subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(F^*\omega)_{(\alpha,\beta)}(AB) &= \omega_{F(\alpha,\beta)}((DF)_{(\alpha,\beta)}A, (DF)_{(\alpha,\beta)}B) \\
&= \det\left[F(\alpha,\beta), (DF)_{(\alpha,\beta)}A, (DF)_{(\alpha,\beta)}B\right].
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$(F^*\omega)_{(\alpha,\beta)}(AB) = \omega(\alpha,\beta)\, d\alpha \wedge\, d\beta(A,B) = \omega(\alpha,\beta) \begin{vmatrix} A_\alpha & A_\beta \\ B_\alpha & B_\beta \end{vmatrix}.$$

Etsityn mitan painofunktio on siis

$$\begin{aligned}
|\omega_(\alpha,\beta)| = |\omega_(\alpha,\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}| &= |\det\left[F(\alpha,\beta), (DF)_{(\alpha,\beta)}(\tfrac{\partial}{\partial\alpha}), (DF)_{(\alpha,\beta)}(\tfrac{\partial}{\partial\beta})\right]| \\
&= |\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta \end{vmatrix}| = |\cos\alpha|,
\end{aligned}$$

kuten tietysti pitääkin.

9. *Käytössäsi on kaikki "Lineaariset Lien ryhmät"- kurssin tiedot. Osoita, että lineaarisen Lien ryhmän $G \subset M^{n\times n}$ Lien algebra on*

$$\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G \textit{ kaikille } t \in \mathbb{R}\}.$$

Ratkaisu: On todistettu, että eksponenttifunktio on kuvaus Lien ryhmän G lien algebralta $\mathfrak{g}$ ryhmälle G, joten ainakin

$$\mathfrak{g} \subset \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G \text{ kaikille } t \in \mathbb{R}\}.$$

Olkoonpa sitten $\exp(tX) \in G$ kaikille $t \in \mathbb{R}$. Tässähän on mitä ilmeisimmin sileä polku ryhmällä G, joten sen derivaattana orogossa on $X \in \mathfrak{g}$. Siinä kaikki! Merkittävää tässä on se, ettei muita polkuja kuin eksponenttifunktiosta tulevia, lainkaan tarvita Lien algebran tekoon.