JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **23.1.2012 / Ratkaisu 1**
D 355 klo. 10.15-11.45 ja D 381 klo 16.15-17.45

1. Kompleksiluvut reaalisina matriiseina

Kuvaus $\mathbb{C} \to$ (2 × 2 *-matriisien rengas):*

$$z = a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on injektiivinen rengashomomorfismi, siis isomorfismi kuvajoukolleen, joka siis on kompleksilukujen kanssa isomorfinen kunta. Kompleksiluvut voi siis samaistaa tätä muotoa oleviin **reaalisiin** 2×2 *-matriiseihin.*

1. *a) Totea, että* $|a + bi| = \sqrt{\det(a + bi)}$

b) Todista edellisen avulla, että kompleksilukujen normi eli itseisarvo on multiplikatiivinen, *ts.* $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

c) Totea, että kompleksiluvun $z = a + bi$ *kompleksikonjugaatti* $\bar{z}$ *on vastaavan matriisin transpoosi.*

d) Mitä matriiseja vastaavat reaaliluvut?

e) Mitä matriisia vastaa $z\bar{z}$ *? Mitä huomaat?*

f) Onko edellä mainittu isomorfismi ainoa tapa upottaa $\mathbb{C}$ *alirenkaaksi kaikkien* 2×2*-matriisien renkaaseen? (Älä mieti liikaa: Muita emme ainakaan käytä.)*

Ratkaisu:

a) $|a + bi| = a^2 + b^2 = \sqrt{\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}$

b) $|z_1 z_2| = \sqrt{\det(z_1)}\sqrt{\det(z_2)} = \sqrt{\det(z_1)\det(z_2)} = \sqrt{\det(z_1)}\sqrt{\det(z_2)} = |z_1||z_2|$.

c) $z = a + bi \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Kompleksikonjugaatti $\bar{z} = a - bi \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

d) $a = a + 0i \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\mathbf{1}$.

e) $z\bar{z} \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = |z|^2\mathbf{1}$. Huomaan, että näinkin voi todistaa, että $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

f) Keksitään toinen tapa upottaa $\mathbb{C}$ alirenkaaksi kaikkien 2×2-matriisien renkaaseen. Upottaminen tarkoittaa injektiivistä rengashomomorfismia. Ykkösen kuvan on siis oltava ykkönen ja i:n kuvaksi on saatava jokin matriisi J, joka itsellään kerrottuna on on miinus ykkösmatriisi. Kun tämä on löydetty/valittu, isomorfismiksi määräytyy (reaalilineaarisuutensa perusteella) kuvaus $a + bi \mapsto \mathbf{1} + \mathbf{bJ}$. Edellä valitun $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lisäksi kelpaa ainakin $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Onko muita? Etsitään kaikki. Tehtäväksi jää määrätä reaaliset $2 \times 2-$ matriisit J, joiden neliö on $J^2 = -\mathbf{1}$, eli ratkaista matriisiyhtälö

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ c(a+d) & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Neljän yhtälön ja neljän tuntemattoman epälineaarinen yhtälöryhmä. Jos olisi $a+d \neq 0$, niin b=c=0 ja siis $a^2 = d^2 = -1$, mikä on mahdotonta, koska $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Siis $a + d = 0$ eli $d = -a$ ja matriisiyhtälöksi jää

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eli $-a^2 - bc = 1$. Mahdollisia ehdokkaita imaginaariyksikköä i edustavaksi matriisiksi ovat siis tasan kaikki sellaiset $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, joilla $-a^2 - bc = 1$ eli $\det J = 1$.

2. *Kompleksilukua $z = a + bi$ vastaavalla matriisilla kertominen on reaalisen 4-ulotteisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ reaalilineaarikuvaus itselleen, joten sillä on näin tulkittuna 4×4-matriisi. Määrää se.*

Ratkaisu:

Käytämme luonnollista kantaa $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\}$. Riittää laskea näiden kuvat (näiden lineaarikombinatioina, mikä tulee luonnostaan.)

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \sim (a, 0, b, 0)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim (0, a, 0, b)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \sim (-b, 0, a, 0)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \sim (0, -b, 0, a)$$

Kirjoittamalla kantavektorien kuvat sarakkeiksi saadaan pyydetty matriisi

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -b & 0 \\ 0 & a & 0 & -b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

3. *Kaikkien 2×2-matriisien rengas on reaalisena vektoriavaruutena tietenkin helposti samaistettavissa avaruuteen $\mathbb{R}^4$ lineaari-isomorfismina esimerkiksi $(a, b, c, d) \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Tunnetulla tavalla $\mathbb{R}^4$ on euklidinen avaruus, siis sisätuloavaruus ja siis edelleen normiavaruus ja metrinen ja lopulta topologinen avaruus. Osoita, että edellisen tehtävän isomorfismin mielessä:*

a) $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}^4$:n vektorialiavaruus (joten se perii sisätulon, normin ja topologian).

b) Onko kompleksiluvun $|z|$ *itseisarvo on sama asia kuin vektorin* $z \in \mathbb{R}^4$ *normi?*

c) Yksikkökompleksiluvulla $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *kertominen on (reaalisen, 2-ulotteisen) tason* $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^4$ *kierto ja* **jos** $\varphi = \frac{\pi}{2}$**, (tehtävää korjattu)** *niin se kuvaa avaruudessa* $\mathbb{C}$ *1-ulotteisen aliavaruuden* $\mathbb{R}$ *ortogonaalikomplementikseen* $\{x \in \mathbb{C} \mid (x|y) = 0 \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Ratkaisu:

a) Kuvaus $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}^4$:n vektorialiavaruus, sillä kuvaus $\mathbb{C} \to$ (2×2 -matriisien rengas):

$$z = a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on injektiivinen rengashomomorfismi, siis isomorfismi kuvajoukolleen, joka on kompleksilukujen kanssa isomorfinen kunta ja jonka samaistimme kompleksilukuihin. Tässä tehtävässä $\mathbb{C}$ tarkoittaa tuota kuvajoukkoa ja sisältää siis alkioidensa summat ja erotukset (lisäksi myös tulot ja muiden kuin nollan käänteiset.) Tietenkin se sisältää nollamatriisin. Matriisin kertominen reaaliluvullakaan ei vie ulos tuosta kuvajoukosta, sillä reaaliluvut ovat kompleksilukuja.

b) Kompleksiluvun $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ itseisarvo on $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vektorin $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ normi on $\sqrt{a^2 + b^2 + b^2 + a^2} = \sqrt{2}\,|z|$, siis ei ihan sama normi, mutta vakiokerrointa vaille sama.

c) Kohdan b):n nojalla $\mathbb{C}$ on myös $\mathbb{R}^4$:n osajoukkona sama normiavaruus kuin tavallisesti, paitsi että kaikkien vektorien pituudeksi on sovittu $\sqrt{2}$ kertaa isompi luku. Siksi kierrot ja ortogonaalisuus säilyttävät alkuperäisen merkityksensä ja siis kompleksiluvulla $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ kertominen on myös (reaalisen, 2-ulotteisen) tason $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^4$ kierto ja jos $\varphi = \frac{\pi}{2}$, niin se suoraan kulman suuruisena kiertona tietenkin kuvaa avaruudessa $\mathbb{C}$ 1-ulotteisen aliavaruuden $\mathbb{R}$ ortogonaalikomplementikseen $\{x \in \mathbb{C} \mid (x|y) = 0 \forall x \in \mathbb{R}\}$. Korkeintaan voi moittia tehtävänantoa siitä, että sanomme edelleen lukua $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ yksikkökompleksiluvuksi, vaikka sen normi neliulotteisessa tulkinnassa onkin $\neq 1$. Enpä tullut huomanneeksi tuota normin muuttumista - eihän koko avaruuden mittakaavalla juuri ole merkitystäkään geometriassa.

4. *a) Osoita, että kompleksilukujonon konvergenssi* $z_n \to z$ *vastaa matriisien* $z_n \in \mathbb{R}^4$ *jonon suppenemista avaruuden* $\mathbb{R}^4$ *euklidisessa topologiassa eli tavallisessa mielessä.*

b) Osoita, että kompleksilukujonon konvergenssi $z_n \to z$ *vastaa matriisien* $z_n \in \mathbb{R}^4$ *jonon suppenemista* alkioittain *eli siinä mielessä, että (reaalisille)* 2×2*-matriiseille*

$$A_n \to A \iff (A_n)_{11} \to A_{11},\ (A_n)_{12} \to A_{12},\ (A_n)_{21} \to A_{21} \text{ ja } (A_n)_{22} \to A_{22}.$$

Ratkaisu:

a) seuraa edellisen tehtävän b)-kohdasta.

b) Yleensäkin $\mathbb{R}^n$:ssä $x = (x_1, \ldots, x_n) \to y = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_j \to y_j \, \forall j = 1, \ldots, n$. Tämän todistamiseksi riittää tutkia tapaus $y = 0$ eli $x_n \to 0$. Katsotaan kumpikin suunta erikseen.

$x = (x_1, \dots, x_n) \to 0 = (0, \dots, 0) \implies x_j \to 0 \,\forall j = 1, \dots, n$, sillä

$$0 \le |x_j| = \sqrt{x_j^2} \le \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|x\|^2 \to 0.$$

$x_j \to 0 \,\forall j = 1, \dots, n \implies x = (x_1, \dots, x_n) \to 0 = (0, \dots, 0)$, sillä

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le n \max_{1\le j\le n} x_j^2 \to 0.$$

2. Kvaterniot reaalisina matriiseina

Kuvaus $\mathbb{H} \to$ kompleksisten (2×2 -matriisien rengas):

$$a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

on injektiivinen rengashomomorfismi, siis isomorfismi kuvajoukolleen, joka siis on kvaternioidenen kanssa isomorfinen vinokunta. Kvaterniot voi siis samaistaa tätä muotoa oleviin kompleksisiin 2×2 -matriiseihin, erityisesti

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Näin teemme seuraavassa.

5. *a) Osoita, että Hamiltonin alkuperäisen kvaternioiden määritelmän ehdot $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ pätevät näille matriiseille.*

Ratkaisu: Neliöt on helppo laskea ja

$$\mathbf{ijk} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}.$$

Juuri yllä laskettiin jo $\mathbf{ij} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \mathbf{k}$. Yhtä helposti lasketaan matriisit kertomalla muutkin, mm. $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$ sekä edelleen esimerkiksi

$$\mathbf{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{j}.$$

Näille kantakvaternioille pätee siis $qr = -rq$, kun $r \neq q$.

Tulkinta: $\mathbb{C}$ on upotettu $\mathbb{H}$:hon valitsemalla $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $i \mapsto \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Olemme siis kompleksi- i-ksi valinneet tämän -1:n neliöjuuren eli imaginaariyksikön, vaikka niistä kvaternioissa olisi ollut valinnan varaa, esimerkiksi $\mathbf{j}$ tai $\mathbf{k}$. (Huomaa, että vinokunnassa siis polynomilla voi olla enemmän juuria kuin sen aste ilmaisee. Ks. myös lisätehtävä ratkaisujen lopussa.)

b) Koska kompleksiluvut on samaistettu reaalisiin 2×2 -matriiseihin, voi kvaterniot samaistaa reaalisiin 4×4 -matriiseihin, siis

$$a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -d \\ d & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -b & c \\ -c & -b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b & c \\ -c & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & d \\ -d & a \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -d & -b & c \\ d & a & -c & -b \\ b & c & a & d \\ -c & b & -d & a \end{pmatrix}$$

Tulkintaa: Käytämme monesta syystä mieluummin kompleksista esitystapaa, mutta kvaterniot voi siis tulkita (paitsi kompleksilineaarikuvauksiksi $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$) myös reaalilineaarikuvauksiksi $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$), siis reaalisiksi matriiseiksi, joita tällä kurssilla käsitellään. **Yllä esitetty triviaali tapa ei ole sama samaistus kuin luennolla käytetty, jossa kvaternio samaistettiin konjugointiin kvaternioiden ryhmässä $\mathbb{H}$, joka samalla on lineaarikuvaus siinä reaalisessa vektoriavaruudessa $\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4$, jossa kantavektoreina ovat kvaterniot 1, i, j ja k. Konjugointi osoittautui jo geometrisesti merkityksellisemmäksi, koska se antoi tulkinnan imaginaaristen kvaternioiden kolmiulotteisen avaruuden rotaatioina.**

a') Totea, että kvaternionormin neliö $|a+bi+cj+dk|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ *on sama kuin* **vastaavan kompleksisen 2×2 -matriisin** *determinantti ja kvaternioidenkin normi on siis multiplikatiivinen: $|qq'| = |q||q'|$. Huomaa, että kvaternionormi tietenkin antaa euklidisen metriikan, kun tulkitaan yksinkertaisesti $a+bi+cj+dk = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.*

Ratkaisu:

$\det \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} = (a+id)(a-id) - (b-ic)(-b-ic) = (a+id)(a-id) + (b-ic)(b+ic) = a^2-(id)^2+b^2-(ic)^2 = a^2+d^2+b^2+c^2 = |q|^2.$

b) Totea, että kvaternion $q = a+bi+cj+dk$ konjugaatti $\bar{q} = a-bi-cj-dk$ on vastaavan matriisin **kompleksikonjugaatin** *transpoosi.*
Ratkaisu:
Kvaterniota $q = a+bi+cj+dk$ vastaavan matriisin $\begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix}$ **kompleksikonjugaatti** on tarkoitettu otettavaksi termeittäin ja se on siis $\begin{pmatrix} a-id & -b+ic \\ b-ic & a+id \end{pmatrix}$.
Tämän transpoosi on $\begin{pmatrix} a-id & b-ic \\ -b+ic & a+id \end{pmatrix}$, joka tosiaan saadaan alkuperäisestä korvaamalla a, b ja c vastaluvuillaan.

c) Mitä kompleksisia 2×2-matriiseja vastaavat reaaliluvut?

Ratkaisu:
Reaaliluvut vastaavat niitä kompleksisia 2×2-matriiseja $\begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix}$, joilla $b=c=d=0$ eli $a \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathbf{1}$.

d) Mitä kompleksista 2×2- matriisia vastaa $q\bar{q}$? Mitä huomaat?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
q\bar{q} &= \begin{pmatrix} a+id & -b-ic \\ b-ic & a-id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-id & b-ic \\ -b+ic & a+id \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+id)(a-id)+(-b-ic)(-b+ic) & (a+id)(b+ic)+(-b-ic)(a+id) \\ (b-ic)(a-id)+(a-id)(a+id) & (b-ic)(b-ic)+(a-id)(a+id) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+d^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & b^2+c^2+a^2+b^2 \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)\mathbf{1}. \sim |\mathbf{q}|^{\mathbf{2}}\text{kuten luvuilla.}
\end{aligned}$$

6. *Määrää kvaterniota $q = 1+i$ vastaava*
a) kompleksinen 2× 2 -matriisi
b) sitä vastaava reaalinen 4×4 -matriisi (syötä äskeiseen kompleksiluvut reaalisina 2×2-matriiseina.)
c) reaalinen 4×4 -matriisi edellisen tehtävän mielessä
d) kuvausta $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto qq'$ vastaava reaalinen 4× 4 -matriisi
e) kuvausta $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto q'q$ vastaava reaalinen 4× 4 -matriisi
f) kuvausta $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto qq'q^{-1}$ vastaava reaalinen 4× 4 -matriisi

Ratkaisu:

a) $q = 1+i = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $q = 1+i = \begin{pmatrix} 1+0i & -1+0i \\ 1+0i & 1+0i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Kuten b). (Vahingossa sama tehtävä kahdesti)

d) Ratkaisu:

Kuvaus $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto qq'$ on $a+bi+cj+dk \mapsto (1+i)(a+bi+cj+dk)$
$= (a+bi+cj+dk) + i(a+bi+cj+dk)$
$= (a+bi+cj+dk) + (ai-b+ck-dj)$
$= (a-b)+(a+b)i+(c-d)j+(d+c)k$, mistä näkee kantavektorien $1, i, j, k$ kuvat, jotka kirjoitetaan sarakkeiksi saaden

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Ratkaisu:

Kuvaus $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto q'q$ on $a+bi+cj+dk \mapsto (a+bi+cj+dk)(1+i)$
$= (a+bi+cj+dk) + (a+bi+cj+dk)i$
$= (a+bi+cj+dk) + (ai-b-ck+dj)$
$= (a-b)+(a+b)i+(c+d)j+(d-c)k$, mistä näkee kantavektorien $1, i, j, k$ kuvat,

jotka kirjoitetaan sarakkeiksi saaden

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) Ratkaisu:

Käyttäen käänteisen lauseketta ja d)-kohdan tulosta saadaan, että kuvaus $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$: $q' \mapsto qq'q^{-1}$ on $a + bi + cj + dk \mapsto (1+i)(a+bi+cj+dk)(1+i)^{-1}$
$= ((a-b) + (a+b)i + (c-d)j + (d+c)k)\frac{1}{2}(1-i)$
$= \frac{1}{2}(((a-b)+(a+b)i+(c-d)j+(d+c)k) - ((a-b)+(a+b)i+(c-d)j+(d+c)k))i$
$= \frac{1}{2}\big((a-b) + (a+b)i + (c-d)j + (d+c)k + (b-a)i + (a+b) + (c-d)k - (c+d)j\big)$
$= \frac{1}{2}\big((2a) + (2b)i + (-2d)j + (2c)k\big) = a + bi - dj + ck$, mistä näkee kantavektorien $1, i, j, k$ kuvat, jotka kirjoitetaan sarakkeiksi saaden

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toinen tapa: Käytetään ensin hyväksi sitä, että i:n kaikki (pos ja neg) potenssit kommutoivat ja lasketaan sitten kuten edellä: $\mathbb{H} \to \mathbb{H} : q' \mapsto qq'q^{-1}$ on
$a + bi + cj + dk \mapsto (1+i)(a+bi+cj+dk)(1+i)^{-1}$
$= (1+i)a(1+i)^{-1} + (1+i)bi(1+i)^{-1} + (1+i)cj(1+i)^{-1} + (1+i)dk(1+i)^{-1}$
$= a + bi + c(1+i)j(1+i)^{-1} + d(1+i)k(1+i)^{-1}$
$= a + bi + \frac{c}{2}(1+i)j(1-i) + \frac{d}{2}(1+i)k(1-i)$
$= a + bi + \frac{c}{2}(j+k)(1-i) + \frac{d}{2}(k-j)(1-i)$
$= a + bi + \frac{c}{2}(j+k+k-j) + \frac{d}{2}(k-j-j-k)$
$= a + bi + dj + ck$, mistä näkee kantavektorien $1, i, j, k$ kuvat kuten yllä.

Kolmas tapa: Laske kantavektorien kuvat erikseen. (Suunnilleen sama vaiva, mutta vie vähän enemmän tilaa.)

7. *Suomenna ja todista tai kumoa: The quaternions* $1, i, j$ *and* k *form a non-Abelian group of order eight (with multiplication as the group operation).*

Ratkaisu:

Kvaterniot $1, i, j$ ja k muodostavat (oikeammin: virittävät!) epäkommutatiivisen 8-alkioisen ryhmän, jossa laskutoimituksena on (kvaternioiden) kertolasku. Väite sanoo siis, että aliryhmä $\langle i, j, k \rangle \subset \mathbb{H}^*$ on epäkommutatiivinen ja 8 -alkioinen.

Ratkaisu:

Epäkommutatiivisuuden toteamiseksi riittää huomata, että $ij \neq ji$.

Aliryhmään $\langle i, j, k \rangle \subset \mathbb{H}^*$ kuuluvat tietenkin annetut 3 kvaterniota ja ykkösalkio 1. Lisäksi siihen kuuluvat annettujen käänteiset $-i, -j$ ja $-k$ ja neliöt, jotka ovat -1. Näin $\langle 1, i, j, k, -1, -i, -j, -k \rangle \subset \langle i, j, k \rangle$. Mutta tässä on "=**, sillä löydettyjen 8 alkion tulot (64 kpl, mutta voi vähän niputella) ja käänteiset kuuluvat kaikki joukkoon $\{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$, joka siis on aliryhmä.

8. *Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}^*$ kompleksikonjugaatin, normin ja käänteisluvun välillä on yhteys: $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Päteekö samanlainen kaava kvaternioille?*

Ratkaisu: Pätee. Oli jo edellä!

9. Täydentävä tehtävä: *Olkoon $u \in \mathbb{H}$* **imaginaarinen yksikkökvaternio.** *(u niin kuin unit length.) Osoitetaan, että $u^2 = -1$, joten kvaterniovinokunnassa voi 2. asteeen yhtälöllä olla ∞ monta ratkaisua.*
Ratkaisu:
Koska $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ ovat ortogonaalisia (ovathan niiden sisätulotut eli tulojen reaaliosat nollia), niin $u = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ siten, että $|u|^2 = a^2+b^2+c^2 = 1$. Siis $u^2 = (a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})^2 = a^2\mathbf{i^2}+b^2\mathbf{j^2}+c^2\mathbf{k^2}+ab(\mathbf{ij}+\mathbf{ji})+ac(\mathbf{ik}+\mathbf{kj})+bc(\mathbf{jk}+\mathbf{kj}) = -a^2-b^2-c^2+0+0+0 = -1$.

10. Ja vielä voi kysellä: *Miksi kvaternion käänteinen on hyvin määritelty, siis oikean- ja vasemmanpuoleinen käänteinen ovat samat?* Vastaus: Näinhän ryhmässä käy, kun molemmat ovat olemassa. Ja neliömatriisihan on kääntyvä, kun sillä on edes toinen!

Lopuksi. Kaikenlaista tietoa kvaternioista löytyy mm sivulta
http://nethelper.com/article/Quaternions#Multiplication_of_basis_elements