JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **26.3.2012 / Harjoitus 6+2=8**
D 381 klo. 16-18.

1. Todista eksponenttifunktion avulla, että Lien matriisiryhmän neutraalialkiolla on ympäristö, joka on sileä monisto.
(Entä onko koko ryhmä monisto?)

2. Olkoot M ja N sileitä monistoja, joilla (tangenttiavaruuden) dimensiot e ja d.
(1) Näytä, että $M \times N$ on sileä $(d+e)$-ulotteinen monisto.
(2) Olkoon $p \in M$, $q \in N$. Osoita, että on olemassa luonnolinen isomorfismi $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$.

3. Olkoon $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Laske eksplisiittisesti kertolaskun tangenttikuvaus

$$d_e\mu : T_eG \times T_eG \to T_eG$$

missä siis $\mu : G \times G \to G$ on ryhmän kertolasku $G = \mathrm{GL}(2, R)$ eli matriisitulo.

4. Olkoot A ja $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvauksia ja (A_{ij}) ja B_{ij} niiden matriisit joissain kannoissa. Määritellään niiden tensoritulo $A \otimes B : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ antamalla kantavektoreille kuvat $(A \otimes B)(e_i \otimes f_j) = Ae_i \otimes Bf_j$ ja jatkamalla lineaarisesti. Määrää kuvauksen $A \otimes B$ matriisi.

5. Miksi edellinen kuvaus $A \otimes B$ ei riipu kantojen valinnasta?

6. Miten määrittelisit kuvauksen $A \otimes B$, jos käytössäsi olisi ainoastaan tensoritulon abstrakti määritelmä universaaliominaisuuden avulla, mutta ei tietoa kannoista. (En ole itse kokeillut, mutta arvelisin, ettei ole kovin vaikeaa - erilaista kyllä.)

7. Vastava tehtävä ulkoiselle eli kiilatulolle: Määrittele lineaarikuvausten kiilatulo ja laske sen matriisi. 2-ulotteinen tapaus varmaan riittää.