JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

**Lineaariset Lien ryhmät** **27.2.2012 / Harjoitus 6**
**D 381 klo. 16-18.**

1. Matriisiryhmällä $\mathrm{U}(n)$ on epätriviaali normaali aliryhmä $\mathrm{SU}(n)$, joka on homomorfismin $\det : \mathrm{U}(n) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ ydin. Osoita suoraan määritelmän mukaan, että Lien algebra $T_{\mathbf{1}}(\mathrm{SU}(n))$ on Lien algebran $T_{\mathbf{1}}(\mathrm{U}(n))$ ideaali.

2. Todistetaan (uudelleen), että $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ on Lien algebran $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ ideaali. Itse asiassa näytetään, että jopa *minkä tahansa* kahden $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$-matriisin Lien sulku on joukossa $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$:

Olkoon $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Olkoot $\mathbf{e}_{ij}$ $(1 \le i,j \le n)$ avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ ortonormaalin kannan muodostavat kantamatriisit, joilla kohdassa $(ij)$ on 1, muuten nollia.

a) Mitä ovat matriisitulot $\mathbf{e}_{ij}X$ ja $X\mathbf{e}_{ij}$? Laske $\mathrm{Tr}[X, X\mathbf{e}_{ij}]$. Pitäisi olla 0. Osoita tästä, että $\mathrm{Tr}[X,Y] = 0$ kaikilla $X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

b) Osoita, että $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ on Lien algebran $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:n ideaali.

c) Laske $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{jk}]$. (Tulos on $\mathbf{e}_{ik}$, kun $i \neq j$, muuten $\mathbf{e}_{ii} - \mathbf{e}_{jj}$.)

d) Yleistä edellinen laskemalla kaikki $[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl}]$. (Tulos on $\delta_{jk}\mathbf{e}_{il} - \delta_{li}\mathbf{e}_{jk}$.)

3. a) Osoita, ettei myöskään Lien algebra $\mathfrak{u}(n) = \{X \mid X + \overline{X}^T = 0\}$ ole yksinkertainen etsimällä Lien algebrasta $\mathfrak{u}(n) = \{X \mid X + \overline{X}^T = 0\}$ yksiulotteinen ideaali $\mathfrak{I}$. (Lue tehtävä loppuun!)

b) Osoita, että $\mathfrak{I}$ on aliryhmän $\mathbf{Z}(\mathrm{U}(n))$ tangenttiavaruus.

c) Osoita, että exp on surjektio $\mathfrak{I} \to \mathbf{Z}(\mathrm{U}(n))$.

4. Osoita, että jokainen $\mathfrak{su}(n)$ on yksinkertainen Lien algebra: Luennolla osoitettiin, että $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ on yksinkertainen ja että $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)$. Osoita, että jos $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{su}(n)$ olisi epätriviaali ideaali, niin $\mathfrak{I} + i\mathfrak{I} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) + i\,\mathfrak{su}(n)$ olisi epätriviaali ideaali.

5. Lien algebra $\mathfrak{so}(4)$ ei ole yksinkertainen, mutta suuremmilla $n$ $\mathfrak{so}(n)$ on yksinkertainen. Todistus on samantapainen kuin $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$:n tapauksessa, mutta hieman mutkikkaampi, koska kantavektorit joudutaan valitsemaan toisin, sillä $\mathfrak{so}(n)$ muodostuu kaikista reaalisista vinosymmetrisistä matriiseista. On luonnollista valita kantavektoreiksi matriisit:

$$E_{ij} = e_{ij} - e_{ji}.$$

Olkoon Olkoon $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$. Laske $XE_{ij}$. Mikä yksinkertaisuustodistusten välinen ero paljastuu?

6. Luennolla on osoitettu, että log on bijektio matriisiryhmän $G$ joltain ykkösen ympäristöltä $U_1$ vastaavan Lien algebran $\mathfrak{g}$ origon ympäristölle $V_0$ ja exp on sen käänteiskuvaus, erityisesti ympäristöt $U_1$ ja $V_0$ ovat siis homeomorfiset. Osoita tämän avulla, että matriisiryhmässä jokaisella alkiolla on kaikilla $n \in \mathbb{N}$ olemassa $n$:s juuri, vieläpä tasan yksi. (Vertailun vuoksi; ryhmässä SO(2) on ykkösalkiolla kaksi neliöjuurta, mutta toinen on "kaukana" ykkösestä.)

7. Mietipä tätä! (kirjan harjoitukset sivulta 153-154. )