JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lineaariset Lien ryhmät **6.2.2012 / Harjoitus 3**

D 355 klo. 8-10 ja D 381 klo. 16-18.

Kvaternioiden vinokunta $\mathbb{H}$ on reaalinen 4-ulotteinen vektoriavaruus $\langle 1, i, j, k\rangle$, jossa *imaginaariset kvaterniot* muodostavat 3-ulotteisen aliavaruuden $\langle 1, i, j, k\rangle \sim \mathbb{R}^3$. Se ei ole multiplikatiivinen aliryhmä, mutta **yksikkökvaterniolla** $q \in \mathrm{SU}(2)$ **konjugointi** $q' \mapsto qq'q^{-1}$ **kuvaa imaginaarisen kvaternion imaginaariseksi kvaternioksi, jolla on sama normi.** Erityisesti yksikkökvaterniolla konjugointi kuvaa $\mathbb{R}^3$:n lineaarisesti ja isometrisesti itselleen — se on $\mathbb{R}^3$:n kierto! Tämä yhteys määrittelee ryhmähomomorfismin $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

1. Määrää em. homomorfismin ydin ja kuvajoukko. Ovatko ryhmät $\mathrm{SU}(2)$ ja $\mathrm{SO}(3)$ isomorfiset?

2. a) Tarakastellaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ kiertoja. Olkoot $e_1, \ldots, e_4$ ortonormaali kanta. Mikä matriisi edustaa lineaarikuvausta $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, joka kiertää $(x_1 - x_2)$-tasoa kulman ϕ verran ja kiinnittää kaksi muuta koordinaattiakselia. b) Entä jos kierretään $(x_3 - x_4)$-tasoa kulman ϕ verran ja kiinnitetään kaksi muuta koordinaattiakselia?

3. Keksi edellisen tehtävän avulla $\mathrm{SO}(4)$:n aliryhmä, joka on isomorfinen torusryhmän $\mathbb{T}^2 = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$ kanssa. (Tämä ilmaistaan sanomalla: ”Etsi $\mathrm{SO}(4)$:stä $\mathbb{T}^2$.”)

4. ”Todista yhdellä sanalla”, että ryhmät $\mathbb{S}_3$ (eli $\mathrm{SU}(2)$) ja $\mathbb{S}_1^3$ (eli $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$) eivät ole isomorfiset.

5. Olkoon $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ja $\|(a, b, c)\| = 1$ sekä T taso $(a, b, c)^\perp$. Peilaus tason T suhteen on lineaarikuvaus. Mikä on sen matriisi?

6. Olkoon $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

a) Olkoon $\phi : [0, 1] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ polku eli jatkuva kuvaus, joka yhdistää A:n ykkösmatriisiin, siis $\phi(0) = 1$ ja $\phi(1) = A$. Konstruoi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$:ssa polku, joka yhdistää A^{-1}:n ykkösmatriisiin.

b) Olkoon lisäksi $\psi : [0, 1] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ polku eli jatkuva kuvaus, joka yhdistää A:n ykkösmatriisiin, siis $\psi(0) = 1$ ja $\psi(1) = B$. Konstruoi $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$:ssa polku, joka yhdistää AB:n ykkösmatriisiin.

c) Osoita, että aliryhmän $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ykkösalkion sisältävä (polku)yhtenäinen komponentti on G:n aliryhmä.

7. (Jatkoksi tehtäville 5-7/2) a) Osoita, että kompleksinen 2×2-matriisi A on kompleksiortogonaalinen eli muotoa $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ tasan silloin, kun $JAJ^{-1} = \overline{A}$, missä $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Olkoon A_{2n} kompleksinen $2n \times 2n$-matriisi. Osoita, että A_{2n} on kvaternio-$n \times n$-matriisi jos ja vain jos $J_{2n} A_{2n} J_{2n}^{-1} = \overline{A}_{2n}$, missä J_{2n} on kompleksinen $2n \times 2n$-matriisi $\begin{pmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J \end{pmatrix}$, missä $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Osoita, että tällöin $\det A_{2n}$ on reaaliluku (, joten tapauksessa $A_{2n} \in \mathrm{Sp}(n)$ on $\det A_{2n} = \pm 1$.)

8. Tehtävän **1.** mukaan on olemassa luonnollinen kaksi yhteen - homomorfismi $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

a) Keksi esimerkki toruksesta $\mathbb{T}^1 \subset \mathrm{SU}(2)$. (Kaikki isomorfiaa vaille.)

b) Todista, että löytämäsi (ja itse asiassa jokainen) $\mathbb{T}^1 \subset \mathrm{SU}(2)$ on maksimaalinen, näyttämällä, että jos $\mathbb{T}^1 \subset T^2 \subset \mathrm{SU}(2)$, niin on olemassa $\mathbb{T}^1 \subset T^2 \subset \mathrm{SO}(3)$.