JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Lien ryhmät **23-24 tai 25 .4.2012 / Harjoitus 6+4=10**

Paikka ja aika auki MAANATAINA pidän luultavsti luennon illalla klo 16-18 lue posti maananataina päivällä tai soita 050-4652301

1. Todista luentotekstistä huomautuksen 1.15 pääkohta eli Jacobin identiteetti (derivaatioiksi tulkittujen) vektorikenttien kommutattorille. Kannattaa varmaan laskea koordinaateissa.

2. Määritelmä: Lien ryhmän (yleisemmin: topologisen ryhmän) G osajoukossa $E \subset G$ määritelty reaaliarvoinen (tai kompleksiarvoinen tms.) funktio $f : E \to \mathbb{R}$ on *vasemmalta tasaisesti jatkuva*, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa neutraalialkion $e \in G$ ympäristö $V \subset G$ siten, että $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ kaikilla $x \in E$ ja $y \in E \cap Vx$. Vastaavasti määritellään *oikealta tasaisesti jatkuva* funktio.

Osoita, että kompaktissa osajoukossa $E \subset G$ jokainen jatkuva funktio on vasemmalta ja oikealta tasaisesti jatkuva.

3. Osoita, että moduli Δ on jatkuva kuvaus $G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Vihje: Tarkastele sellaista jatkuvaa kompaktikantajaista funktiota $f : G \to \mathbb{R}$, jolla

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = 1.$$

Osoita, että

$$\Delta(g) = \int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x).$$

ja käytä edellisen tehtävän tulosta.

4. Osoita, että jos μ on vaseninvariantti (eli Haarin) mitta, niin $\Delta(g^{-1})\mu$ on oikeainvariantti mitta.

5. Osoita, että sarakevektoreille $X, Y \in \mathbb{R}^2$ ja 2×2-neliömatriisille A pätee $\det[AX, AY] = \det A \det[X, Y]$. Huomaa ettei hakasulku tässä ole Lien algebran laskutoimitus, vaan matriisisulkeet sarakkeiden ympärillä.

6. (Ei vaikea!) Luentotekstissä on tarkasteltu tason $M = \mathbb{R}^2$ 1-muotoa

$$\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2,$$

jolle tavallisessa kannassa on tangenttivektorille $X = (a, b)$ pisteessä $p = (x, y)$

$$\begin{aligned}\omega_p(X) &= x_2(-dx_1)_p(a, b) + x_1(dx_2)_p(a, b) = -x_2 a + x_1 b = x_1 b - x_2 a \\ &= \det \begin{bmatrix} x_1 & a \\ x_2 & b \end{bmatrix} = \det[p, X].\end{aligned}$$

Differentiaalimuodolla ω on rajoittuma alimonistoon $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$, joten ω antaa yksiulotteisen "tilavuusmuodon" yksikköympyrälle. Yllä laskettiin juuri, että pisteittäin $\omega_p(X) = \det[p, X]$. Tästä voi päätellä, että ω on *rotaatioinvariantti* eli *invariantti ryhmän* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *suhteen*, toisin sanoen

$$F^*\omega = \omega \text{ kaikilla } F \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

sillä lineaarikuvaus $F \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ on itsensä derivaatta, joten jokaisessa pisteessä p on (edellisen tehtävän mukaan, huomaa että [ ] ovat matriisisulkeita)

$$\begin{aligned}(F^*\omega)_p(X) &= \omega_{F(p)}((DF)_p(X)) = \det[F(p), (DF)_p(X)] \\ &= \det[F(p), F(X)] = \det[p, X] = \omega_p(X).\end{aligned}$$

Ryhmä $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ kuvaa tietenkin ympyrän itselleen, joten on mielekästä ja edellä laskettun mukaan myös totta, että myös ω:n rajoittuma ympyrälle on invariantti ryhmän $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ suhteen. Ympyrä on yksiulotteinen, joten 1-muoto ω määrittelee ympyrällä mitan $|\omega|$, joka edellä sanotun mukaan on invariantti ryhmän $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ suhteen ja tietenkin myös peilausten suhteen, siis koko ortogonaaliryhmän $\mathrm{O}(2)$ suhteen.

Todista, että $|\omega|$ on vakiokerrointa vaille sama asia kuin kaarenpituus.

7. (Jatkoa)

Osoita, että koko ympyrän $|\omega|$-mitta on 2π, joten ympyrän $\mathbb{S}_1$ normeerattu Haarin mitta on $\frac{1}{2\pi}|\omega|$. (en oloe vielä tarkastanut laskua) Voit esimerkiksi laskea ympyrän lokaalissa parametrisoinnissa sinin ja kosinin avulla.

8. Konstruoi differentiaalimuotojen avulla rotaatioinvariantti mitta pallolle $\mathbb{S}_2$. Laske eksplisiittisesti auki. (Tässä on hiemn työtä.)

9. Käytössäsi on kaikki ”Lineariset Lien ryhmät”- kurssin tiedot. Osoita, että lineaarisen Lien ryhmän $G \subset M^{n\times n}$ Lien algebra on

$$\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G \text{ kaikille } t \in \mathbb{R}\}.$$