HAARIN MITTA

Sisältö

1. Differentiaalimuodot 3
1.1. Tangenttivektorit ja -kuvaukset 3
1.2. Vektorikentät 3
1.3. Vektorikentät derivaatioina 4
1.4. Differentiaalimuodot 5
1.5. d-muodon tilavuusmuoto ja integrointi sen suhteen 7
2. Haarin mitta 10
2.1. Vasen ja oikea Haarin mitta 10
2.2. Haarin mitta lineaarisella tai affiinilla Lien ryhmällä, joka on $\mathbb{R}^m$:n avoin joukko 14
2.3. Haarin mitta tuloryhmällä 16
3. Haarin mitta ja invariantit vektorikentät. 17
3.1. Moniston vektorikentät Lien algebrana. 17
3.2. Lien ryhmän G adjungoitu esitys Ad ja Lien algebra $\mathfrak{g}$ 20
3.3. Eksponenttikuvaus ja yksiparametriset aliryhmät 24
3.4. Ad, ad ja exp lineaarisessa Lien ryhmässä. 27
3.5. Lineaarisen Lien ryhmän Haarin mitta ja Lien algebra 28
4. Katsaus kompaktien lineaaristen Lien ryhmien esityksiin 33
4.1. Esityksen unitarisointi 33
4.2. Schurin lemma 34
4.3. Kompaktit itseadjungoidut operaattorit 35

4.4. Esitysten ortogonaalirelaatiot 36
4.5. Peterin ja Weylin lause ja Fourier-sarjat (Ei kuulu kurssiin) 40
4.6. Rotaatioryhmän esityksistä (Ei kuulu kurssiin) 45
5. Historiaa 45

1. Differentiaalimuodot

1.1. Tangenttivektorit ja -kuvaukset.

Määritelmä 1.1. Klassisen moniston $M \subset \mathbb{R}^n$ *tangenttivektori pisteessä* $p \in M$ on sileän polun γ derivaatta

$$\gamma'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} \in \mathbb{R}^n,$$

missä on oletettu, että $\gamma(0) = p$.

Huomautus 1.2. Joukko

$$T_pM = \{X \mid X \text{ on } M\text{:n tangenttivektori pisteessä } p\} \subset \mathbb{R}^n$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorialiavaruus ja sama kuin lokaalin parametrisoinnin φ^{-1} derivaatan $(D\varphi^{-1})(\varphi(p))$ kuva-avaruus, jota jo aikaisemmin olemme sanoneet moniston M *tangenttiavaruudeksi* pisteessä p.

Määritelmä 1.3. Olkoon $F : M \to N$ klassisten monistojen $M \subset \mathbb{R}^n$ ja $N \subset \mathbb{R}^m$ välinen sileä kuvaus. F *kuvaa* sileän polun $\gamma :]a, b[\to M$ *sileäksi poluksi* $F \circ \gamma$ monistolla N. Kuvapolun tangenttivektori kohdassa $q = F(p)$ on määritelmän mukaan $(F \circ \gamma)'(0)$, joka ketjusäännön mukaan on $D_pF(\gamma'(0))$. Sanomme derivaattaa $d_pF = T_pF = (DF)_p : T_pM \to T_qM$ kuvauksen F *tangenttikuvaukseksi* eli *differentiaalikuvaukseksi* kohdassa p.

Huomautus 1.4. Jos F on diffeomorfismi pisteiden p ja q ympäristöjen välillä, niin tangenttikuvaus kohdassa p on tietenkin lineaari-isomorfismi $T_pM \to T_qM$, ja tämä pätee käänteisluvauslauseen mukaan toisinkin päin: jos derivaatta jokaisessa avoimen joukon $U \subset M$ pisteessä p on isomorfismi, niin F on lokaali diffeomorfismi eli (lokaali) peitekuvaus ympäristöltä U monistolle N.

1.2. Vektorikentät.

Määritelmä 1.5. Sileän moniston M *tangenttikimppu* TM on *erillinen yhdiste* sen tangenttiavaruuksista, siis $\bigcup_{p \in M} T_pM$ (eli muodollisesti kuvaus $p \mapsto T_pM$ tai toisin tulkiten $\bigcup_{p \in M}(\{p\} \times T_pM)$). Tangenttiavaruuksia T_pM sanotaan tässä yhteydessä usein *tangenttikimpun säikeiksi.*

Huomautus 1.6. Tangenttikimppu TM varustetaan abstraktin sileän moniston rakenteella siten, että TM:n karttaympäristöjä ovat M:n karttaympäristöjen U tangenttikimput $TU = \bigcup_{p \in U}(\{p\} \times T_pM)$, ja karttalehdet ovat joukkoja $\varphi(U) \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Moniston TM karttakuvaukset ovat kuvaukset

$$TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^d : (p, X) \mapsto (\varphi(p), D_x\varphi(X).$$

Huomaa, että nämä kuvaukset ovat '*säikeen säilyttäviä*: saman säikeen pisteet (p, X) ja (p, Y) kuvautuvat kumpikin samaan karteesisen tulon säikeeseen $\varphi(p) \times \mathbb{R}^d$.

Huomaa myös, että tangenttikimppu saa karttakuvauksistaan luonnollisen topologian (Harjoitutehtävä: Tämä topologia on lokaalisti sama kuin karteesisella tulolla, mutta koko tangenttikimppu ei yleensä ole kimppuna, siis säikeet säilyttävästi isomorfinen karteesisen tulon kanssa. Yleensä se ei ole edes homeomorfinen sen kanssa).

Vastaavalla tavalla voi rakentaa yleisempiäkin *vektorikimppuja*, jotka ovat lokaalisti muotoa $U \times \mathbb{R}^d$ ja joiden karttakuvaukset vievät säikeet säikeille lineaarisesti. Tällaisia karttakuvauksia on tapana sanoa *lokaaleiksi trivialisoinneiksi*, sillä karteesinen tulo $M \times \mathbb{R}^m$ on nimeltään *triviaali vektorikimppu*. Palaamme konstruktioon, jos tarvitsemme sitä.

Määritelmä 1.7. *Vektorikenttä* eli tangenttivektorikimpun *leikkaus* eli *sektio* on sileä kuvaus

$$\xi : M \to TM : p \mapsto \xi_p \in T_pM.$$

Moniston M vektorikenttien joukko on luonnollisin laskutoimituksin reaalinen vektoriavaruus, jota seuraavassa merkitään ΞM tai lyhyesti Ξ.

Määritelmä 1.8. Olkoon $F : M \to N$ klassisten monistojen M ja N välinen diffeomorfismi. F *kuvaa* vektorikentän $\xi \in \Xi M$ *vektorikentäksi* $F_*\xi \in \Xi N$, joka määritellään asettamalla

$$(F_*\xi)_{F(p)} = T_pF(\xi_p).$$

Huomautus 1.9. *Funktori* $F \mapsto F_*$ on *kovariantti*, toisin sanoen

$$(F \circ G)_* = F_* \circ G_*,$$

kun molemmat puolet on määritelty.

1.3. **Vektorikentät derivaatioina.**

Huomautus 1.10. Vektoriin $X \in T_pM$ liittyy "derivointisuunnan ilmoittava funktionaali"

$$\widetilde{X} : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto \widetilde{\xi} f = Df_p(X).$$

Määritelmä 1.11. Vektorikenttään $\xi \in \Xi M$ liittyy edellisen huomautuksen mukaan *ensimmäisen asteen differentiaalioperaattori*

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi} : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty M : & \\ & f \mapsto \widetilde{\xi} f = \big(p \mapsto Df_p(\xi_p) \in \mathbb{R}\big). \end{aligned}$$

Huomautus 1.12. Differentiaalioperaattori $\widetilde{\xi}$ on lineaarikuvaus $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$, mutta ei säilytä funktioiden (pisteittäistä) tuloa, vaan on *derivaatio pisteessä*, ts. kaikille $f, g \in \mathcal{C}^\infty M$ ja $p \in M$:

$$(\widetilde{\xi}(f \cdot g))(p) = \widetilde{\xi} f(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot \widetilde{\xi} g(p)$$

eli pätee *tulon derivoimiskaava* eli *Leibnitzin kaava*:

$$\widetilde{\xi}(f \cdot g) = \widetilde{\xi} f \cdot g + f \cdot \widetilde{\xi} g.$$

Tämä on helppoa todeta koordinaateissa laskemalla, onhan $\widetilde{\xi} f(p)$ sama asia kuin funktion f suunnattu derivaatta suuntaan ξ_p pisteessä p.

Karttalehdellä $\subset \mathbb{R}^d$ on olemassa kantavektorikentät $x \mapsto e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots$ ja $\mapsto e_d = (0, \ldots, 1)$. Näihin liittyvät derivaatiot ovat tavalliset osittaiderivoinnit $\frac{\partial}{\partial x_j}$,akselien suuntaan.

Lause 1.13. *Avaruuden $\mathbb{R}^d$ avoimella joukolla eli avoimella alimonistolla jokainen derivaatio $d : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ on (vakiolla kerrottu) suunnattu derivaatta johonkin suuntaan eli $\mathcal{C}^\infty$ -lineaarikombinaatio osittaisderivoinneista akselien suuntiin:*

$$d = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

joka siis määräytyy — tässä kannassa — ”suunta- eli vektoriarvoisesta” $\mathcal{C}^\infty$ -funktiosta $x \mapsto (\alpha_1(x), \ldots, \alpha_d(x))$.

Todistus. Katso Holopainen. □

Huomautus 1.14. Edellisestä lauseesta seuraa erityisesti, että jokainen derivaatio $d : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ on jonkin sileän vektorikentän määräämä $d = \widetilde{\xi}$ jollekin $\xi \in \Xi$. Koska tämä pätee karttalehdillä, ja on lokaalia, se pätee myös jokaisella sileällä monistolla M. Koska lisäksi on ilmeistä, että eri vektorikenttiä vastaavat eri derivaatiot, on $\xi \mapsto \widetilde{\xi}$ bijektio sileiden vektorikenttien joukolta ΞM funktiolgebran $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ derivaatioiden joukolle. Sekä ΞM että derivaatioiden joukko ovat vektoriavaruuksia ja $\xi \mapsto \widetilde{\xi}$ on lineaarinen, siis isomorfismi. Siksi voidaan vektorikentät **samaistaa derivaatioihin**. Tässä mielessä $\xi = \widetilde{\xi}$.

Vektorikentän $x \mapsto \xi_x$ eri tulkinnat ovat hyödyllisiä eri yhteyksissä.

a) Koordinaateissa $\xi_x = \begin{bmatrix} \xi_i(x) \\ \vdots \\ \xi_d(x) \end{bmatrix}$.

b) Koordinaateissa derivaationa $\xi_x = \widetilde{\xi}_x = \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$.

1.4. **Differentiaalimuodot.**

Määritelmä 1.15. Sileän moniston M *(sileä) 1-muoto* eli *asteen 1 differentiaalimuoto* α on kuvaus, joka jokaiseen pisteeseen $p \in M$ liittää lineaarikuvauksen $\alpha_p : T_pM \to \mathbb{R} : \xi_p \mapsto \alpha_p(\xi_p)$ siten, että α on $\mathcal{C}^\infty$ -lineaarinen

$$\alpha : \Xi M \to \mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Esimerkki 1.16. Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty$ derivaatta on (asteen 1) differentiaalimuoto:

$$df_p = Df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Koska jokaisen lineaarikuvauksen derivaatta muodostuu sen kopioista tangenttikimpun säikeisiin, niin erityisesti jokainen koordinaattifunktio $x_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : x \mapsto x_j$ määrittelee differentiaalimuodon

$$dx_j = x_j : \Xi\mathbb{R}^d \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \xi_x \mapsto (\xi_x)_j,$$

joka siis poimii tangenttivektorin $X = \xi_x$ j:nnen koordinaatin: $dx_j(X) = X_j$.

Analyysin kursseilta tiedetään, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ tavallisissa koordinaateissa, siis erityisesti jokaisella kartalla, funktion f derivaata on

$$df_x = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j.$$

eli kaikille $X = \xi_x \in T_x\mathbb{R}^n$ on

$$df_x(X) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, X_j.$$

Määritelmä 1.17. Lineaarialgebrasta tiedetään, että d -ulotteisen vektoriavaruuden V kantaan liittyvät koordinaattifunktiot muodostavat kannan avaruuteen $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ on lineaarinen}\}$, jota sanotaan V:n *duaaliavaruudeksi*. Siksi jokainen 1-muoto on lokaaleissa koordinaateissa muotoa

$$\alpha(\xi(x)) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j(x) dx_j$$

missä kerroinfunktiot α_j ovat sileitä.

Tämä antaa aiheen määritellä moniston M *kotangenttikimpun*, joka muodostuu sen tangenttiavaruuksien duaaliavaruuksista:

$$T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*.$$

Asteen 1 differentiaalimuodot ovat kotangettikimpun leikkauksia eli *kovektorikenttiä* ja muodostavat vektoriavaruuden, jota merkitään seuraavassa alustavasti Ξ^*M.

Määritelmä 1.18. Olkoon $F : M \to N$ klassisten monistojen $M \subset \mathbb{R}^n$ ja $N \subset \mathbb{R}^m$ välinen diffeomorfismi. F *kuvaa* asteen 1 differentiaalimuodon $\alpha \in \Xi N$ *differentiaalimuodoksi* $F^*\alpha \in \Xi M$, joka määritellään asettamalla

$$(F^*\alpha)_p(\xi_p) = \alpha(F_*(\xi_p)).$$

Huomautus 1.19. Edellinen määritelmän antaa kaavan, jolla voi siirtää differentiaalimuodon kartalta toiselle. Näin voi siis laskea differentiaalimuodon missä tahansa koordinaateissa, kun se on annettu jossain koordinaatistossa eli jollain kartalla.

Funktorin F^* ylätähti viittaa siihen, että F^* on *kontravariantti*:

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*.$$

Määritelmä 1.20. *Kertaluvun k differentiaalimuoto* ω on alternoivista k-lineaarimuodoista muodostuva "kenttä", toisin sanoen $\mathcal{C}^\infty$ -lineaarinen ja alternoiva kuvaus eli $\omega \in \Lambda^k \Xi(M)$. Pisteessä $p \in M$ kuvaus ω_p on alternoiva k-lineaarikuvaus

$$\begin{aligned} \omega_p : T_pM \times \cdots \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ (\xi_1, \ldots, \xi_k)_p &\mapsto \omega_p(\xi_1, \ldots, \xi_k)_p. \end{aligned}$$

joka on lineaarinen ja alternoiva.

Määritelmä 1.21. 1-differentiaalimuodoista $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ muodostettu *kiilatulo* eli *ulkoinen tulo* on k-lineaarimuoto

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k : (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto \det[\alpha_k(\xi_k)]_{1 \le i,j \le k} \in \mathcal{C}^\infty.$$

Määritelmä 1.22. Olkoon $F : M \to N$ klassisten monistojen M ja N välinen diffeomorfismi. F *kuvaa* asteen k differentiaalimuodon $\omega \in \Lambda^k \Xi N$ *k-differentiaalimuodoksi* $F^*\omega \in \Lambda^k \Xi M$, joka määritellään asettamalla

$$(F^*\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(F^*\xi_1, \dots, F^*\xi_k)).$$

Huomautus 1.23. Näin voi siirtää k-differentiaalimuodon kartalta toiselle. Yleistettynäkin funktori F^* on *kontravariantti*:

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*.$$

Edellinen määritelmä merkitsee pisteessä $p \in M$, että

$$(F^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{F(p)}(DF_p(X_1), \dots, DF_p(X_k)).$$

Esimerkki 1.24. Koska alternoiva k-muoto on 0, kun muuttujat ovat lineaarisesti riippuvia, niin $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = 0$, kun $k > d = \dim M$.

Kun $k = d = \dim M$, niin tavallinen determinatti on vakiokerrointa vaille ainoa alternoiva k-lineaarikuvaus. Siksi d-differentiaalimuoto on koordinaateissa muotoa

$$\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d,$$

missä $a \in \mathcal{C}^\infty$.

1.5. d-muodon tilavuusmuoto ja integrointi sen suhteen.

1.26 *Huomautus* 1.25. Suoraan laskemalla voi todeta, että jos M ja $N \subset \mathbb{R}^d$ ovat avoimia joukkoja ja $F : M \to N$ on diffeomorfismi, niin N-puolen d-muoto (huomaa dimensio)

$$\omega = b(y)\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d$$

kuvautuu kuvauksessa F^* M-puolen d-muodoksi

$$F^*\omega = b(F(x))\, JF(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d,$$

missä $JF(x)$ on funktion F *Jacobin determinantti* $\det\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right]$. Tämä antaa mahdollisuuden määritellä ja laskea jokaiselle d-ulotteisella monistolla M annettuun *d-muotoon liittyvän tilavuusmitan* seuraavalla tavalla:

Määritelmä 1.26. Olkoon d-ulotteisella monistolla M annettu d-muoto ω. Olkoon kartan φ koordinaateissa lausuttuna $\omega = a(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$. Olkoon $|\omega|$ karttalehdellä määritelty mitta, joka saadaan Lebesguen mitasta painofunktiolla $|a(x)|$, toisin sanoen

$$|\omega|(A) = \int_A |a(x)|\, dx_1 \dots dx_d.$$

Huomautuksen 1.25 nojalla tämä ei riipu koordinaatistosta, vaan *mitan alkukuvana*[1]

$$F^{-1}|\omega| = |F^*\omega|,$$

[1] Mitan μ alkukuva on mitta $F^{-1}(\mu)(A) = \mu(F(A))$.

joten monistolla M määritelty d-muoto määrittelee mitan monistolla. Käytännössä tämä tarkoitaa, että mitta ei riipu käytetyistä koordinaateista.

Huomautus 1.27. Kartanvaihtoihin sovellettuna tämä antaa tunnetun integraalin muuttujanvaihtokaavan diffeomorfismissa F: jokaiselle kompaktikantajaiselle jatkuvalle funktiolle f karttalehdellä W pätee

$$\int_{F(A)} f(y)|\omega|\,(dy) = \int_A f(F(x))|F^*\omega|\,(dx)$$

eli lokaaleissa koordianaateissa

$$\int_{F(A)} f(y)|a(y)|\,dy_1 \dots dy_d = \int_A f(F(x))|a(F(x))|\,|JF((x)|\,dx_1 \dots dx_d.$$

Seuraus 1.28. *Lien ryhmien yhteydessä tarkastellaan usein tilannetta, jossa mitta* $|\omega|$ *sattuu olemaan* invariantti *kuvauksen* F *suhteen, eli pätee* $F^*\omega = \pm\omega$. **Invariantille mitalle** *edelliset lausekkeet tietenkin yksinkertaistuvat ja saadaan:*

$$\int_{F(A)} f(y)|\omega|\,(dy) = \int_A f(F(x))|\omega|\,(dx)$$

eli lokaaleissa koordianaateissa

$$\int_{F(A)} f(y)|a(y)|\,dy_1 \dots dy_d = \int_A f(F(x))|a(F(x))|\,dx_1 \dots dx_d.$$

Esimerkki 1.29. a) Olkoon $M = \mathbb{R}^d$ ja

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

Silloin d-muotoon ω liittyvä tilavuusmitta $|\omega|$ on luonnollisestikin pelkkä Lebesguen mitta itse, sillä nyt (jokaisessa tangenttiavaruudessa) on tavallisessa kannassa kaikille tangenttivektoreille X_i

$$\begin{aligned}\omega_p(X_1, \dots, X_d) &= (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d)(X_1, \dots, X_d)\\ &= \det[dx_i(X_j)]_{1\le i,j\le d}\\ &= \det[(X_j)_i]_{1\le i,j\le d}.\end{aligned}$$

Matriisia $[(X_j)_i]_{1\le i,j\le d}$ on luontevaa merkitä sarakkeidensa jonona, siis $[X_1 \, \dots \, X_d]$. Näin merkiten siis $\omega_p(X_1, \dots, X_d) = \det[X_1 \, \dots \, X_d]$.

b) Olkoon $M = \mathbb{R}^2$. Tarkastellaan 1-muotoa (!)

$$\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2,$$

jolle tavallisessa kannassa on tangenttivektorille $X = (a, b)$ pisteessä $p = (x, y)$

$$\begin{aligned}\omega_p(X) &= x_2(-dx_1)_p(a, b) + x_1(dx_2)_p(a, b) = -x_2 a + x_1 b = x_1 b - x_2 a\\ &= \det\begin{bmatrix} x_1 & a \\ x_2 & b \end{bmatrix} = \det[p \; X].\end{aligned}$$

Tarkasteltavana oleva differentiaalimuoto $\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2$, on 1-muoto 2-ulotteisella monistolla $\mathbb{R}^2$, joten siitä ei muodostu edellisen teorian mukaista tilavuusmittaa; ulotteisuudet eivät täsmää. Mutta tarkoitus ei olekaan integroida 1-muotoa yli 2-ulotteisen moniston, vaan yli 1-ulotteisen moniston. Sellainen on esimerkiksi yksikköympyrä $S_1 \subset \mathbb{R}^2$.

Tutkittavalla differentiaalimuodolla $\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2$, on luonnollisesti olemassa *rajoittuma* alimonistoon $S_1 \subset \mathbb{R}^2$, sillä jokainen S_1:n tangenttivektori on samalla $\mathbb{R}^2$:n tangenttivektori: $T_p S_2 \subset T_p \mathbb{R}^2$. Tämä on ilmeisintä, kun ajattelee tangenttivektoreita polkujen derivaattoina. Näin voidaan differentiaalimuoto aina rajoittaa alimonistoon! 1-muoto $\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2$, määrää siis kyllä tilavuusmuodon yksikköympyrälle. Laskemme sen:

Olemme jo todenneet, että pisteittäin $\omega_p(X) = \det \begin{bmatrix} x_1 & a \\ x_2 & b \end{bmatrix} = \det[p\ , X]$. Tästä näkyy, että ω on *rotaatioinvariantti* eli *invariantti ryhmän* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *suhteen*, toisin sanoen $F^*\omega = \omega$ kaikilla $F \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, onhan jokainen $F \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ lineaarikuvaus, siis itsensä derivaatta, joten jokaisessa pisteessä p on

$$
\begin{aligned}
(F^*\omega)_p(X) &= \omega_{F(p)}((DF)_p(X)) = \det[F(p)\ (DF)_p(X)] \\
&= \det[F(p)\ F(X)] = \det[p\, X] = \omega_p(X).
\end{aligned}
$$

Tässä yhtälö $\det[F(p)\ F(X)] = \det[p\, X]$ seuraa siitä, että oletuksen mukaan $\det F = 1$ ja yleisesti[2] $\det[AX$
$, , AY] = \det A \det[X\ Y]$.

Ryhmä $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ kuvaa tietenkin ympyrän itselleen, joten on mielekästä ja edellä lasketun mukaan myös totta, että myös ω:n rajoittuma ympyrälle on invariantti ryhmän $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ suhteen. Ympyrä on yksiulotteinen, joten 1-muoto ω määrittelee ympyrällä mitan $|\omega|$, joka edellä sanotun mukaan on invariantti ryhmän $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ suhteen ja tietenkin myös peilausten suhteen, siis koko ortogonaaliryhmän $\mathrm{O}(2)$ suhteen.

Laskemalla ympyrän tavallisessa lokaalissa parametrisoinnissa sinin ja kosinin avulla huomaa, että löytämämme mitta on tavallinen kaarenpituus ja siis koko ympyrän mitta on 2π.

c) Olemme konstruoineet differentiaalimuotojen avulla ympyrälle S_1 eli Lien ryhmälle $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ invariantin mitan eli *Haarin mitan.*(Ks. 2) Tavoitteenamme on konstruoida invariantti mitta muillekin Lien ryhmille. Palloista ainakin S_3 on Lien ryhmä, joten voi olla kiintoisaa konstruoida aluksi rotaatioinvariantti mitta pallolle S_3. Itse asiassa rotaatioinvariantti mitta löytyy kaikenulotteisille palloille samalla tempulla kuin ympyrällekin[3]:

Olkoon $M = R^n$ ja

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, x_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

[2]Helppo harjoitustehtävä(8). Huomaa ettei hakasulku vaan matriisisulkeet sarakkeiden ympärillä.

[3]Harjoitustehtävä (8): Laske tapaus S_2 eksplisiittisesti

Tässä merkintä $\widehat{dx_j}$ tarkoittaa, että 1-muoto dx_j on poistettava ω:n lausekkeesta, joten ω on $n-1$ -muoto. Laskemalla kuten kohdassa b) huomataan nyt, että

$$\omega_x(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \det[x\ X_1\, dots\, X_{n-1}],$$

joten nytkin ω on rotaatioinvariantti, ja siis myös sen rajoittuma yksikköpalloon S_{n-1} on rotaatioinvariantti eli $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ -invariantti. Pallolle määräytyvä mitta $|\omega|$ on rotaatioinvariantti ja itse asiassa peilausinvarianttikin, siis peräti $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ -invariantti.

d) Itse asiassa edellä konstruoimamme rotaatioinvariantti mitta on vakiokerrointa vaille ainoa rotaatioinvariantti mitta pallolla. Kertoimen voi normeerata vaatimalla, että koko pallon mitakis tulee 1. Tätä ei laskumme anna edes tapauksessa S_1, vaan pallon mitta $|\omega|(S_n)$ on lakettava. Tulos on

$$|\omega|(S_n) = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

missä Γ on gammafunktio.[4]

Haar

2. Haarin mitta

2.1. **Vasen ja oikea Haarin mitta.**

Määritelmä 2.1. G Lien ryhmän Radon-mitta[5] μ on *vaseninvariantti* eli *(vasen) Haarin mitta*,[6] jos

$$\mu(gA) = \mu(A)$$

kaikille Borel-joukoille $A \subset G$ ja kaikille $g \in G$, jolloin

$$\int_G f(gx)\,\mu = \int_G f(x)\,\mu$$

kaikille jatkuville kompaktikantajaisille funktioille f.

Jos $\mu(G) = 1$, niin Haarin mitta on *normeerattu.*

Lause 2.2. *Haarin mitta on aina olemassa ja vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen.*

Perustelu: Yleinen tapaus sivuutetaan.[7] Haarin mitan olemassaolo todistetaan seuraavissa luvuissa lineaariselle Lien ryhmälle. Lisäksi laskemme sille eksplisiittisen lausekkeen klassisten ryhmien tapauksessa.

Huomattakoon heti, että äärellisen ryhmän Haarin mitta on lukumäärämitta. $\square$

[4] Sama kuin todennäköisyyslaskennassa.

[5] Muistaakseni Radon- mitta on mitta, jossa Borel-joukot ovat mitallisia ja kompaktit joukot äärellismittaisia.

[6] Alfréd Haar 1885 - 1933 Unkari. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Haar.html

[7] Riittää itse asiassa olettaa, että G on lokaalikompakti topologinen ryhmä.

Huomautus 2.3. Vastaavalla tavalla voi määritellä *oikeainvariantin mitan*. Yleisessä epäkommutatiivisessa ruhmässä vasen- ja oikeainvariantti mitta ovat eri asioita, mutta ne voivat olla samoja ilman, että ryhmä on kommutatiivinen — ja usein ovatkin (Ks. 2.11.). Seuraava havainto tuo alustavaa valaistusta vasemman ja oikean invarianssin väliseen yhteyteen:

Määritelmä 2.4. Koska Lien ryhmän G normalisoitu Haarin mitta μ on yksikäsitteinen, niin jokaisella $g \in G$ Haarin mitta μ ja siitä g-konjugoinnilla saatava vaseninvariantti[8] mitta $\mu_g(A) = \mu(gAg^{-1})$ eroavat toisistaan vain g:stä riippuvalla positiivisella vakiolla: Kaikilla Borel-joukoilla A on

$$\mu(Ag^{-1}) = \mu(gAg^{-1}) = \Delta(g)\mu(A).$$

Näin määritelty funktio $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ on nimeltään *ryhmän G moduli*.

Huomautus 2.5. Moduli antaa tavan laskea integraalin g:llä konjugoidusta tai oikealta siirretystä funktiosta (vasen siirto oli jo yllä):

$$\int_G f(xg^{-1})\,\mu = \int_G f(gxg^{-1})\,\mu = \Delta(g)\int_G f(x)\,\mu.$$

Lause 2.6. *Jos μ on vaseninvariantti eli Haarin mitta, niin $\Delta(g^{-1})\mu$ on oikeainvariantti mitta.*

Todistus. Ratkaisu: Oletuksen mukaan μ on vaseninvariantti, ts. kaikilla $g \in G$ ja kompaktikantajaisilla jatkuvilla funktioilla f on

$$\int_G f(gx)\,d\mu(x) = \int_G f(x)\,d\mu(x).$$

Modulin määritelmän mukaan

$$\int_G f(gxg^{-1})\,d\mu(x) = \int_G f(xg^{-1})\,d\mu(x) = \Delta(g)\int_G f(x)\,d\mu(x).$$

Vaihtamalla g:n rooliin g^{-1} saadaan

$$\int_G f(g^{-1}xg)\,d\mu(x) = \Delta(g^{-1})\int_G f(x)\,d\mu(x).$$

Väite sanoo, että $\Delta(x^{-1})\mu(x)$ on oikeainvariantti, eli

$$\int_G f(xg)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) = \int_G f(x)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x).$$

[8] Helppo HT.

Lasketaan käyttäen μ:n vaseninvarianssia sekä modulin Δ multiplikatiivisuutta ja sen yllä viriteltyä määritelmää:

$$\begin{aligned}\int_G f(xg)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) &= \int_G f(g^{-1}xg)\,\Delta(g^{-1}x^{-1})\,d\mu(x)\\ &= \int_G f(g^{-1}xg)\,\Delta(g^{-1}x^{-1}g)\Delta(g^{-1})\,d\mu(x)\\ &= \Delta(g^{-1})\int_G f(g^{-1}xg)\,\Delta((g^{-1}xg)^{-1})\,d\mu(x)\\ &= \Delta(g^{-1})\Delta(g)\int_G f(x)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)\\ &= \int_G f(x)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x). \quad \square\end{aligned}$$

□

Delta-1 **Seuraus 2.7.** *Kaikilla $g \in G$ ja kompaktikantajaisilla jatkuvilla funktioilla f on*

$$\int_G f(x^{-1})\,d\mu(x) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)$$

Todistus. Huomataan aluksi, että

$$f \mapsto \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)$$

on vaseninvariantti mitta, minkä näkee heti soveltamalla mitan $\Delta(x^{-1})d\mu(x)$ oikeainvarianssia funktioon $\varphi(x) = f(x^{-1})$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\int_G \varphi(xg)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) &= \int_G \varphi(x)\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x)\\ \text{eli}\quad \int_G f(g^{-1}x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) &= \int_G f(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Koska vaseninvariantit eli Haarin mitat eroavat toisistaan vain vakiokertoimella, on siis olemassa luku $C > 0$, jolla

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) = C\int_G f(x)\,d\mu(x).$$

Soveltamalla tätä valiten f:n rooliin vasemman puolen integroitavan funktion $\psi(x) = f(x^{-1})\Delta(x^{-1})$ saa, huomaten aluksi, että $1 = \Delta(x)\Delta(x^{-1})$:

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\,d\mu(x) &= \int_G f(x)\Delta(x)\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) = C\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x),\\ \text{siis } C\int_G f(x)\,d\mu(x) &= C^2\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x),\\ \text{mutta } C\int_G f(x)\,d\mu(x) &= \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\,d\mu(x),\end{aligned}$$

joten $C = 1$. □

Huomautus 2.8. Moduli Δ on jatkuva ryhmähomomorfismi $G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Todistus. Homomorfisuus on ilmeinen tosiasia.[9] Jatkuvuustodistus perustuu seuraavaan käsitteeseen ja lemmaan:

Lien ryhmän (yleisemmin: topologisen ryhmän) G osajoukossa $E \subset G$ määritelty reaaliarvoinen (tai kompleksiarvoinen tms.) funktio $f : E \to \mathbb{R}$ on *vasemmalta tasaisesti jatkuva*, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa neutraalialkion $e \in G$ ympäristö $V \subset G$ siten, että $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ kaikilla $x \in E$ ja $y \in E \cap Vx$. Vastaavasti määritellään *oikealta tasaisesti jatkuva* funktio.

Kompaktissa osajoukossa $E \subset G$ jokainen jatkuva funktio on vasemmalta ja oikealta tasaisesti jatkuva. (Harjoitustehtävä(8).)

Päätodistus: μ on vaseninvariantti, jolloin modulin määritelmän ja f:stä tehdyn oletuksen mukaan

$$\int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x) = \Delta(g) \int_G f(x)\, d\mu(x) = \Delta(g).$$

Siis Δ on kuvaus $g \mapsto \int_G f(xg^{-1})\, \mu$. Tämä on jatkuva, sillä oletuksen mukaan f on jatkuva, siis edellisen tehtävän mukaan molemmin puolin tasaisesti jatkuva, eli kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa neutraalialkion $e \in G$ ympäristö $V \subset G$ siten, että $|f(g) - f(h)| \leq \epsilon$ kaikilla $g \in \operatorname{Supp} f$ ja $h \in \operatorname{Supp} f \cap Vg$, jolloin

$$\begin{aligned} |\Delta(g) - \Delta(h)| &= |\int_G f(xg^{-1})\, d\mu(x) - \int_G f(xh^{-1})\, d\mu(x)| \\ &\leq |\int_G f(xg^{-1}) - f(xh^{-1})|\, d\mu(x) \leq \int_{\operatorname{Supp} f} \epsilon\, d\mu(x) \sim \epsilon, \end{aligned}$$

sillä V voidaan valita siten, että $xh^{-1} \in V_{xg^{-1}}$, kun $h \in V_{g^{-1}}$. □

Määritelmä 2.9. Jos moduli Δ on vakio 1 eli G on *unimodulaarinen*, niin ryhmän G vasen- ja oikeainvariantit mitat ovat samoja. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että Haarin mitta on oikeainvariantti ja sen kanssa, että on olemassa mitta, joka on sekä oikea- että vaseninvariantti. Abelin ryhmä on tietenkin unimodulaarinen.

Lause 2.10. *Kompakti ryhmä on unimodulaarinen, samoin diskreetti ryhmä.*

Todistus. Jos G on kompakti, niin kuvajoukko $\Delta(G) \subset \mathbb{R}$ on kompakti aliryhmä. Mutta multiplikatiivisella ryhmällä $\mathbb{R}_+$ ei tietenkään ole muita kompakteja aliryhmiä kuin $\{1\}$. Siis G on unimodulaarinen.

Jos taas G on diskreetti, niin kompaktit joukot ovat äärellisiä, joten kompaktikantajainen funktio f on aina äärelliskantajainen. Mitta μ, joka kompaktikantajaiseen funktioon f liittää integraalin

$$\int_G f\, \mu = \sum_{x \in G} f(x)$$

[9]HT.

on oikea- ja vaseninvariantti. □

avoinHaar

2.2. **Haarin mitta lineaarisella tai affiinilla Lien ryhmällä, joka on $\mathbb{R}^m$:n avoin joukko.**

Esimerkki 2.11. Tarkastellaan Lien ryhmää G, joka on $\mathbb{R}^m$:n avoin joukko ja jonka alkiot ovat joko lineaarisia tai affiineja kuvauksia ja laskutoimitus kuvausten yhdistäminen. Tavoitteena on löytää G:n Haarin mitta yritteellä $\mu = h\lambda$, missä λ on Lebesguen mitta ja painofunktio h on jatkuva. Mitan μ vaseninvarianssi merkitsee, että jokaisella $g \in G$ on oltava

$$h(x) = h(gx)|(JL_g)|,$$

missä $L_g = g\cdot : G \to G$ ja siis JL_g on *vasemmalta kertomisen* eli kuvauksen $L_g = g\cdot : G \to G$ Jacobin determinantti.[10] Valitsemalla $g = x^{-1}$ huomaa, että ainoat ehdokkaat mitaksi μ ovat

$$h(x) = h(e)|JL_{x^{-1}}| = h(e)|JL_x|^{-1},$$

missä vakio $h(e)$ määräytyy halutusta normituksesta. Esimerkkejä:

a) Abelin ryhmässä $(\mathbb{R}^n, +)$ Lebesguen mitta λ täyttää ym. ehdon, sillä tietenkin se on vaseninvariantti. Tarkastetaan asia harjoituksen vuoksi suoraankin: Olkoon $g \in (\mathbb{R}^n, +)$ eli olkoon olemassa $v \in \mathbb{R}^n$, jolla $g(x) = x + v$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Voidaan samaistaa g ja v, jolloin kuvausten yhdistäminen vastaa vektorien yhteenlaskua ja siis jokainen $L_g = g\cdot$ on identtinen kuvaus + vakio, joten sen Jacobin determinantti on $JL_g = 1$.

b) Yksiulotteisten affinien kuvausten epäkommutatiivinen ryhmä G muodostuu kuvauksista

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b,$$

missä $a \neq 0$. Selvästi tällaisen affiinin kuvauksen voi samaistaa matriisilla

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kertomiseen, kun luku x samaistetaan vektoriin $x = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$. Näistä matriiseista muodostuu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$:n aliryhmä G, topologisena avaruutena $G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, joka on avoin osajoukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Vasemmalta kertominen on kuvaus $L_g = g\cdot : G \to G$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay + b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

joka samaistuu kuvaukseen

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (ax, ay + b).$$

[10]Huomaa, että lineaarisessa Lien ryhmässä vasemmalta kertominen on lineaarikuvaus, joten sen derivaaatta on se itse ja Jacobin determinantti siis välittömästi lasketavissa.

Sen Jacobin determinantti on
$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2.$$
Vastaava vaseninvariantti eli Haarin mitta on siis (mahdollista vakiokerrointa vaille) $\mu = \frac{1}{a^2}\lambda$, jonka suhteen integaali on koordinaateissa (a,b) lausuttuna (merkitty $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
$$\int_G f\,\mu = \int_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}} f(a,b)\,\frac{1}{a^2}\,da\,db.$$

Vastaavalla tavalla — tutkien oikelta kertomiskuvausta $R_g = \cdot \circ g : G \to G$ — voidaan affiinien kuvausten ryhmään rakentaa myös oikeainvariantti mitta μ_r, joka tulee olemaan
$$\int_G f\,\mu_r = \int_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}} f(a,b)\,\frac{1}{|a|}\,da\,db.$$
Modulifunktioksi saadaan siis $\Delta(g) = \frac{a^{-2}}{|a|^{-1}} = |a|^{-1}$.

c) Ryhmän $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alkiot ovat kääntyvät $n \times n$-matriisit eli matriisit, joden detrminatti ei ole 0, joten G on kaikkien $n\times n$-matriisien avaruuden $M_n = \mathbb{R}^{n^2}$ avoin joukko. Matriisitulo vasemmalta $gA = L_g(A) : G \to G$ on lineaarikuvaus (sellaisen rjoittuma), joten se on itsensä derivaatta ja sen Jacobin determinentti on siis sen determinantti. Koska matriisitulo vasemmalta $gA = L_g(A)$ lasketaan kertomalla oikeanpuoleinen matriisi A sarakkeittain, se voidaan kirjoittaa: $gA = [gx^1, \ldots, gx^n]$, missä vektorit $x^1, \ldots, X^n$ ovat matriisin A sarakkeet. Siksi (HT)
$$JL_g = \det L_g = (\det g)^n.$$
Vastaavalla tavalla saadaan oikenpuoleisen kertolaskun Jacobin deteminantti siitä huomiosta, että oikealta kertominen kertoo matriisin riveittäin. Siksi myös
$$JR_g = \det R_g = (\det g)^n.$$
Saatavat mitat ovat samat, joten $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on unimodulaarinen, vaikka ei ole kommutatiivinen. Ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ Haarin mitta on siis matriisien luonnollisissa eli matriisialkioittaisissa koordianateissa x_{ij}
$$|\det g|^{-n} \prod_{i,j=1}^{n} dx_{ij}$$

d) Aitojen (lävistäjällä **ykkösiä**) yläkolmiomatriisien ryhmä $G = T_0(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ voidaan topologisen avaruutena tietenkin samaistaa avaruuteen $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Se osoittautuu unimodulaariseksi ja Haarin mitta on Lebesguen mitta:
$$\int_G f\mu = \int_{\mathbb{R}^{n(n-1)/2}} f(x) \prod_{i,j=1}^{n} dx_{ij}.$$

VO e) Kaikkien kääntyvien yläkolmiomatriisien ryhmä $G = T(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ voidaan topologisena avaruutena samaistaa avoimeen joukkoon $(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \subset$

$\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. (Vasen) Haarin mitta on

$$\int_G f\mu = \int_{(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}} f(x) \prod_{i=1}^n |x_{ii}|^{i-n-1}\, dx_{ii} \prod_{i<j} dx_{ij}$$

ja oikea

$$\int_G f\mu_r = \int_{(\mathbb{R}^*)^n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}} f(x) \prod_{i=1}^n |x_{ii}|^{-i}\, dx_{ii} \prod_{i<j} dx_{ij},$$

joten $G = T(n, \mathbb{R})$ ei ole unimodulaarinen, vaan sen modulifunktio on vakiosta eroava

$$\Delta_(x) = \prod_{i=1}^n |x_{ii}|^{2i-n-1}.$$

2.3. **Haarin mitta tuloryhmällä.**

Lause 2.12. *Olkoon G lokaalikompakti ryhmä, esimerkiksi Lien ryhmä, ja olkoot P ja Q sen suljettuja aliryhmiä siten, että topologisena avaruutena $G = P \times Q$, tarkemmin sanoen $P \times Q \to G : (p, q) \mapsto xy$ on homeomorfismi. Merkitään Δ:lla ryhmän G modulifunktiota. Olkoon $\mu_{l,P}$ vasen Haarin mitta ryhmällä P ja $\mu_{r,Q}$* **oikea** *Haarin mitta ryhmällä Q. Silloin*

$$\int_G f\mu = \int \_P \times Q f(xy)\Delta(y)\, dx(\mu_{l,P})\, dy(\mu_{r,Q})$$

on vasen Haarin mitta ryhmällä G. (Muista: Vasen Haarin mitta on vakiota vaille yksikäsitteinen.)

Todistus. Todistus tulee tähän. Se perustuu siihen, että tiedetään teoriasta, että μ on olemassa ja yksikäsitteinen ja integroidaan ensin tulomuotoisia funktioita $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, joiden lineaarikombinaatiot ovat itse asiassa tiheässä avaruudessa $\mathcal{C}^\infty(P \times Q)$. □.

Seuraus 2.13. *Tunnetusti*[11] *ryhmä $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on ryhmien $P = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ja $Q = T(n, \mathbb{R})_+$ tulo. Tässä $T(n, \mathbb{R})_+$ on niiden yläkolmiomatriisien ryhmä, joilla kaikki lävistäjäalkiot ovat positiivisia. Olkoon α ryhmän $P = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ normeerattu Haarin mitta (Kompakina ryhmänä $P = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ on unimodulaarinen, joten α on molemmanpuolinen Haarin mitta.) Väitetään, että α:n ja ryhmän $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ Haarin mitan (joka on Lebesguen mitta λ) välillä on seuraava yhteys: jokaiselle ryhmällä $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ integroituvalle funktiolle f pätee:*

$$\int_G f(x) |\det(x)|^{-n} \prod_{i,j=1}^n dx_{ij} = c_n \int_{P\times Q} f(pq)\, d\alpha(p) \prod_{i=1}^n q_{ii}^{-1} \prod_{i\le j}^n dq_{ij}.$$

missä vakio c_n riippuu vain dimensiosta n.

[11]Tämä ns. *Gramin hajoitelma* ei kyllä sisälly lineaarialgebran peruskurssiin.

Todistus. Ryhmä $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on edellisen kohdan c) mukaan unimodulaarinen ja sen Haarin mitta on $|\det g|^{-n} \prod_{i,j=1}^n dx_{ij}$. Erityisesti $\Delta(y) = 1$. Ryhmän $Q = T(n,\mathbb{R})_+$ oikeanpuoleinen Haarin mitta on tietenkin sama kuin ryhmän $Q = T(n,\mathbb{R})$ oikeanpuoleinen Haarin mitta, joka edellä laskettiin kohdassa e) ja on

$$\mu_r = \prod_{i=1}^n |x_{ii}|^{-i}\, dx_{ii} \prod_{i<j} dx_{ij} = (\prod_{i=1}^n x_{ii}^{-i}) \prod_{i\le j} dx_{ij}.$$

Edellinen lause antaa siis tässä tapauksessa

$$\int_G f(x)|\det(x)|^{-n} \prod_{i,j=1}^n dx_{ij} = \int_G f\mu = c_n \int_{P\times Q} f(pq)\Delta(q)\, dp(\mu_{l,P})\, dq(\mu_{r,Q})$$

$$= c_n \int_{P\times Q} f(pq)\, d\alpha(p) \prod_{i=1}^n q_{ii}^{-i} \prod_{i\le j} dq_{ij}.$$

□Jos mitat valitaan normalisoiduiksi, vakio c_n voidaan laskea valitsemalla sopiva funktio f. Tulokseksi saadaan gammafunktiolauseke

$$c_n = \frac{2^n \pi^{n(n+1)/4}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{i}{2})}.$$

3. Haarin mitta ja invariantit vektorikentät.

3.1. **Moniston vektorikentät Lien algebrana.** Palautamme seuraavassa mieleen Lien ryhmän Lien algebran käsitteen ja tulkitsemme sen hieman uudella tavalla. Todistamme seuraavassa nimittäin, että jokaisen sileän moniston vektorikentät muodostavat Lien algebran. Tavoitteena on sitten tulkita Lien ryhmän Lien algebran alkiot vektorikentiksi, jolloin niille siis jo on määritelty vektorikenttien hakatulo. Pitää sitten tietenkin tarkastaa, että se on sama asia kuin aikaisemmalla kurssilla määrittelemämme Lien ryhmän Lien algebran hakatulo. Lopullisesti tämä todistetaan (lineaariselle Lien ryhmälle) kohdassa 3.21.

Määritelmä 3.1. Moniston M vektorikenttä voidaan tulkita derivaatioksi $\widetilde{\xi}$, joka on kuvaus $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$. Kahden tällaisen yhdistetty kuvaus on lineaarikuvaus, yleensä ei derivaatio. Kommutaattori

$$[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = \widetilde{\xi} \circ \widetilde{\eta} - \widetilde{\eta} \circ \widetilde{\xi}$$

on derivaatio ja näin määritelty vektorikenttien hakatulo on bilineaarinen ja antisymmetrinen, ja toteuttaa (tod: Harjoitustehtävä (9) ja alla) *Jacobin identiteetin*

$$[[\xi,\eta],\alpha] + [[\eta,\alpha],\xi] + [[\alpha,\xi],\eta] = 0,$$

joten vektorikenttien avaruus ΞM on Lien algebra.

Huomautus 3.2. Vektorikenttien hakatulo lokaaleissa koordinaateissa:

Olkoon

$$\xi_x f = \widetilde{\xi}_x f = \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ ja}$$

$$\eta_x f = \widetilde{\eta}_x f = \sum_{j=1}^{d} \eta_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Sijoittamalla ja sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}(\xi \circ \eta f - \eta \circ \xi f)(x) &= \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{\eta}_x f) - \sum_{j=1}^{d} \eta_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\widetilde{\xi}_x f) = \dots \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j(x) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Sileiden vektorikenttien ξ ja η hakatulo on siis koordinaatistossa kirjoitettuna vektorikenttä, jonka i:s komponentti on

$$\sum_{j=1}^{d} \left(\xi_j(x) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j(x) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right).$$

VK-Lie *Huomautus* 3.3. Koska moniston M vektorikenttä voidaan tulkita derivaatioksi $\widetilde{\xi}$, joka on kuvaus $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$, on mahdollista muodostaa kahden tällaisen yhdistetty kuvaus $\widetilde{\xi} \circ \widetilde{\eta}$. Koordinaateissa tämä merkitsee suunnattua derivointia kahteen eri suuntaan, ensin toiseen, sitten toiseen. Näin syntyy kyllä lineaarikuvaus $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$, mutta yleensä ei derivaatio. Sen sijaan kahden vektorikentän kommutaattori eli niiden *hakatulo*

$$[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = \widetilde{\xi} \circ \widetilde{\eta} - \widetilde{\eta} \circ \widetilde{\xi}$$

on kyllä derivaatio. On ilmeistä, että hakatulo on bilineaarinen ja antisymmetrinen. Leibnitzin kaava eli ”tulon derivoimiskaava” on sama asia kuin että hakatulo toteuttaa *Jacobin identiteetin*

$$[[\xi, \eta], \alpha] + [[\eta, \alpha], \xi] + [[\alpha, \xi], \eta] = 0.$$

Todistamme tämän harjoituksen vuoksi kahdella eri tavalla. **1. tapa**: Määritelmän mukaan saadaan, koska vektorikenttä on lineaarikuvaus:

$$\begin{aligned}[[\xi, \eta], \gamma] &= (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) \circ \gamma - \gamma \circ (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) \\ &= \xi \circ \eta \circ \gamma - \eta \circ \xi \circ \gamma - \gamma \circ \xi \circ \eta + \gamma \circ \eta \circ \xi,\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}&[[\xi, \eta], \gamma] + [[\eta, \gamma], \xi] + [[\gamma, \xi], \eta] \\ &= \xi \circ \eta \circ \gamma - \eta \circ \xi \circ \gamma - \gamma \circ \xi \circ \eta + \gamma \circ \eta \circ \xi \\ &+ \eta \circ \gamma \circ \xi - \gamma \circ \eta \circ \xi - \xi \circ \eta \circ \gamma + \xi \circ \gamma \circ \eta \\ &+ \gamma \circ \xi \circ \eta - \xi \circ \gamma \circ \eta - \eta \circ \gamma \circ \xi + \eta \circ \xi \circ \gamma \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. tapa: Ensimmäisenä vaiheena Jacobin identiteetin todistamiseksi lasketaan hakatulo lokaaleissa koordinaateissa (samantekevää, missä koordinaateissa, käsitteethän on määritelty koordinaattivapaasti!):

Olkoon kaikille $f \in \mathcal{C}^\infty$

$$\xi_x f = \widetilde{\xi}_x f = \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

kuten yllä ja

$$\eta_x f = \widetilde{\eta}_x f = \sum_{j=1}^{d} \eta_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Sijoittamalla ja sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}
(\xi \circ \eta f - \eta \circ \xi f)(x) &= \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{\eta}_x f) - \sum_{j=1}^{d} \eta_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} (\widetilde{\xi}_x f) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{i=1}^{d} \eta_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big) - \sum_{j=1}^{d} \eta_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big(\sum_{i=1}^{d} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \big(\eta_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \big) - \sum_{j=1}^{d} \eta_j(x) \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j} \big(\xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \big) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \sum_{i=1}^{d} \big(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \eta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \big) \\
&- \sum_{j=1}^{d} \eta_j(x) \sum_{i=1}^{d} \big(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \big) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \left(\xi_j(x) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \eta_j(x) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \xi_j(x) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j(x) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Sileiden vektorikenttien ξ ja η hakatulo on siis koordinaatistossa kirjoitettuna vektorikenttä, jonka i:s komponentti on

$$\sum_{j=1}^{d} \left(\xi_j(x) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j(x) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right).$$

Siis $[[\xi,\eta],\gamma]$ on vektorikenttä, jonka i:s komponentti eli $\frac{\partial}{\partial x_i}$:n kerroin on

$$\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\gamma_j\frac{\partial(\sum_{k=1}^{d}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\right))}{\partial x_j}\right)$$
$$=\sum_{j,k=1}^{d}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\eta_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\gamma_j\frac{\partial(\xi_k\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k})}{\partial x_j}+\gamma_j\frac{\partial(\eta_k\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k})}{\partial x_j}\right)$$
$$=\sum_{j,k=1}^{d}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\eta_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\gamma_j\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}-\gamma_j\xi_k\frac{\partial^2\eta_i}{\partial x_k\partial x_j}+\gamma_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+\gamma_j\eta_k\frac{\partial^2\xi_i}{\partial x_k\partial x_j}\right)$$

Lopuksi todetaan, että kolmen tällaisen summana - kiertäen $\gamma\to\eta\to\xi$ saadaan 0. Yhteenlaskua helpottaa, kun ryhmitellään samannäköiset termit yhteen siitä toivossa, että ne kumoavat toisensa. Pelkkiä ensimmäisiä derivaattoja sisältävien termien summaksi tulee

$$\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\eta_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\gamma_j\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}+\gamma_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}$$
$$+\eta_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\gamma_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\xi_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}+\xi_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}$$
$$+\gamma_k\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\eta_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+\eta_j\frac{\partial\xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}\Big).$$

Poimitaan tästä ne, joiden derivoimaton kerroin on ξ:n komponentti

$$\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\xi_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}+\xi_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\Big)$$
$$=\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\Big)+\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_j\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}-\xi_j\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_k}\Big)$$
$$=\sum_{j,k=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\Big)+\sum_{k,j=1}^{d}\Big(\xi_k\frac{\partial\gamma_j}{\partial x_k}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\xi_k\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_j}\Big)=0$$

Samalla tavalla käsitellään η- ja γ-kertoimiset termit ja lopuksi toisen asteen derivaat, joten olemme nyt todistaneet kahteen kertaan, että sileän moniston tangenttivektorikimppu eli vektorikenttien avaruus ΞM on Lien algebra. □

3.2. **Lien ryhmän G adjungoitu esitys** Ad **ja Lien algebra $\mathfrak{g}$.**

Huomautus 3.4. Lineaarisen Lien ryhmän G Lien algebra $\mathfrak{g}$ on edellisellä kurssilla määritelty sen tangenttiavaruudeksi neutraalialkion kohdalla varustettuna tietyllä tavalla suuntaiderivaatoista saadulla hakatulolla, joka todistettiin samaksi kuin tangenttivektoreina olevien matriisien kommutaattori $[X,Y]=XY-YX$.

Muistamme samalla, että matriisien eksponenttifunktio välitti yhteyden, jota myös voisi pitää lineaarisen Lien ryhmän G Lien algebran $\mathfrak{g}$ määritelmänä:

$$\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \,\big|\, \forall t \in \mathbb{R} : \exp(tX) \in G\}.$$

(Harjoitustehtävä(10))

Seuraava yleinen määritelmä on sama kuin edellisellä kurssilla, mutta esitettynä monistoterminologiassa. Ideana on, että Lien sulkeet saadaan derivoimalla ryhmän *konjugointikuvaus* eli *sisäinen automorfismi* ensin muuttujan (keskellä) suhteen ja sitten myös konjugoivan alkion suhteen. Seuraava sanamuoto on tähän pääosin viritetty Karen Smithin luennoista, jotka on jo jaettu aikaisemmin

Ad1 **Määritelmä 3.5. K.S. Vaihe 1.** Olkoon η n-ulotteisen Lien ryhmän G *toiminta konjugointina ryhmässä* G, ts. kullakin $g \in G$ on

$$\begin{aligned} \eta_g : G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Kukin kuvaus η_g (kiinteällä $g \in G$) on diffeomorfismi ja $\eta_g(e) = e$, joten sen derivaatta kohdassa e on bijektiivinen lineaarikuvaus

$$(d\eta_g)_e : T_eG \to T_eG.$$

Kuvaus $g \mapsto (d\eta_g)_e$ on Lien ryhmähomomorfismi $G \to GL(T_eG)$ (Harjoitustehtävä. (9?). Sen nimi on *Lien ryhmän G adjungoitu esitys*,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\to \mathrm{GL}(T_eG) \sim \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto (\mathrm{Ad}_g = (d\eta_g)_e : T_eG \to T_eG) \end{aligned}$$

Vaihe 2. Huomataan, että myös kuvaus Ad eli riippuvuus g:stä on sileä. Silläkin on siis derivaatta kohdassa $e \in G$. Määritellään ja merkitään[12]

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} = (d\,\mathrm{Ad})_e : T_eG &\to T_I(GL(T_eG)) \\ X &\mapsto (\mathrm{ad}_X : T_eG \to T_eG). \end{aligned}$$

Kuvauksen Ad derivaatta ad on siis lineaarikuvaus Lien ryhmän G tangenttiavaruudelta T_eG vektoriavaruuden $GL(T_eG)$ tangenttiavaruudelle kohdassa I eli avaruudelle

$$T_I(GL(T_eG)) \sim M_{n\times n} \sim \{\text{lineaarikuvaukset } T_eG \to T_eG\}.$$

Vaihe 3. Määritellään lopuksi, että *vektoriavaruuden T_eG Lien sulku* on

$$\begin{aligned} &= \mathrm{ad}_X Y, \text{ ts.} \\ \mathrm{ad}_X &= [X, \cdot]. \end{aligned}$$

Olemme edellisellä kurssilla todenneet tämän toteuttavan Lien algebran määritelmän: bilineaarisuuden, antisymmetrian ja Jacobin identiteetin. Lien ryhmän G tangenttiavaruus kohdassa e varustettuna tällä Lien sululla on Lien ryhmän G Lien algebra.

[12] Merkitään toisinaan Ad_X, toisinaan $\mathrm{Ad}\,X$, samoin ad_X, toisinaan $\mathrm{ad}\,X$.

Huomautus 3.6. Seuraavassa kerrataan tällä terminologialla (uudelleen, mutta periaatteessa samalla tavalla kuin 1. kursilla!) edellisen määritelmän yhteydessä esitetyt väitteet.

Vaihe 1. Konjugointi on diffeomorfismi, joten Ad_g eli $d_e\eta_g$ on lineaarinen bijektio $T_eG \to T_eG$. Ketjusäännön mukaan $\mathrm{Ad}_{gg'} = d_e\eta_{gg'} = d_e(\eta_g \circ \eta_{g'}) = d_{\eta'(e)}\eta_g \circ d_e\eta_{g'} = d_e\eta_g \circ d_e\eta_{g'} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_{g'}$, eli

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(T_eG) \sim GL_n(\mathbb{R})$$

on homomorfismi, lisäksi tietenkin sileä, minkä huomaa lokaaleissa koordinaateissa, (matriisielementit!).

Vaihe 2. Ad on siis sileä. Sen derivaatta ad on lineaarikuvaus, ts.

$$T_eG \to T_I(GL(T_eG)) \sim M_{n\times n} \sim \{\text{lineaarikuvaukset } T_eG \to T_eG\}.$$

Vaihe 3 a) Sulkeiden $[X, Y] = \mathrm{ad}_X Y$ bilineaarisuus: Koska ad_X on lineaarikuvaus $T_eG \to T_eG$, niin $Y \mapsto [X, Y] = \mathrm{ad}_X Y$ on tietenkin lineaarinen muuttujan Y suhteen. Lineaarisuus muuttujan X suhteen johtuu vastaavasti siitä, että kuvaus $\mathrm{ad} : X \mapsto \mathrm{ad}_X$ on kuvauksen Ad derivaatta jossain kohdassa ja siis lineaarikuvaus.

Vaihe 3 b) c) Sulkeiden $[X, Y] = \mathrm{ad}_X Y$ alternoivuus ja Jacobin identiteetti. Nämä asiat eivät ole itsestäänselviä. Seuraavassa ne johdetaan osoittamalla, että Lien ryhmän Lien algebran kuvaus ad itse asiassa on vastaavan moniston tangenttivektorikenttien kommutaattori.

Yhteyden antaa eksponenttifunktio. (K.S. luennoissa on ensin pari esimerkkiä. Niitä tuskin enää tarvitaan). Sen sijaan seuraavalla lauseella on mielenkiintoa:

Lause 3.7. *Olkoon G Lien ryhmä. Lineaarikuvaus* $\mathrm{ad} : T_eG \to \mathfrak{gl}(T_eG)$ *eli* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *säilyttää Lien sulkeet, toisin sanoen kaikille $X, Y \in \mathfrak{g}$:*

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y],$$

missä vasemmalla on Lien ryhmän G Lien algebran $\mathfrak{g}$ sulkeet ja oikealla Lien ryhmän $GL(T_eG)$ Lien algebran $\mathfrak{gl}(T_eG)$ Lien sulkeet, jotka tunnetusti (KS ja aikaisempi kurssi kohta??) ovat lineaarikuvausten strandardisulkeet.

Todistus. Todistettava kaava sanoo tasan sen, että Jacobin identiteetti on voimassa ryhmän G Lien algebralle:

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] &= 0\\
[X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] - [[X,Y],Z] &= 0\\
\mathrm{ad}_X([Y,Z]) - \mathrm{ad}_Y([X,Z]) - \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) &= 0\\
\mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(Z)) - \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(Z)) - \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) &= 0\\
\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X &= \mathrm{ad}_{[X,Y]}
\end{aligned}$$

□

Tämä tulos on erikoistapaus seuraavasta lauseesta:

Lause 3.8. *Olkoon $f : G \to H$ Lien ryhmien homomorfismi. Derivaatta df_e : $T_eG \to \mathfrak{gl}(T_eG)$ eli $\mathfrak{g} \to \mathcal{H}$ on* Lien algebrahomomorfismi *eli lineaarikuvaus, joka lisäksi säilyttää Lien sulkeet, toisin sanoen kaikille $X, Y \in \mathfrak{g}$:*

$$df_e[X,Y] = [df_eX, df_eY],$$

missä vasemmalla on Lien ryhmän G Lien algebran $\mathfrak{g}$ sulkeet ja oikealla Lien ryhmän H Lien algebran $\mathcal{H}$ Lien sulkeet.

Todistusluonnos: Tämä todistetttin 1. kurssilla! Ryhmähomomorfismin derivaatta on algebrahomomorfismi![13] □

TÄSSÄ TODISTUSLUONNOS ??? On ilmeistä, että ryhmän konjugointi voidaan vaihtaa homomorfismin kanssa siinä mielessä, että diagramma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \eta_g \downarrow & \cdot & \downarrow \eta_{f(g)} \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

kommutoi eli $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1}$ kaikilla $g, h \in H$. Derivoimalla kaikki kuvaukset saadaan ketjusäännön perusteella kommutatiivinen diagramma: kaikilla $g \in G$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_ef} & \mathcal{H} \\ \mathrm{Ad}_g \downarrow & \cdot & \downarrow \mathrm{Ad}_{f(g)} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_ef} & \mathcal{H} \end{array}$$

jolloin on saatu kuvaukset

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \mathrm{Ad} \downarrow & \cdot & \downarrow \mathrm{Ad} \\ GL(\mathfrak{g}) & & GL(\mathcal{H}) \end{array}$$

siten, että kaikilla $X \in \mathrm{Ad}(G) \subset GL(\mathfrak{g})$ on

$$df_e(\mathrm{Ad}_g(X)) = \mathrm{Ad}_{f(g)}\, d_ef(X).$$

Derivoimalla tämä g:n suhteen saadaan

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_ef} & \mathcal{H} \\ \mathrm{ad} \downarrow & & \downarrow \mathrm{ad} \\ \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) & & \mathfrak{gl}(\mathcal{H}), \end{array}$$

jossa jälleen ao. kuvajoukossa $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ pätee diagramman kommutatiivisuuskaava eli kaikilla $Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} d_ef(\mathrm{ad}_X)(Y) &= \mathrm{ad}_{d_ef(X)}\, d_ef(Y), \\ \text{eli} \quad d_ef([X,Y]) &= [d_ef(X), d_ef(Y)]. \end{aligned}$$

[13]Täytynee varmistaa ettei jäänyt kiertopäättelyä. Viime kädessä todistus perustuu joka tapauksessa eksponenttifunktioon.

3.3. **Eksponenttikuvaus ja yksiparametriset aliryhmät.**

Määritelmä 3.9. *Reaalisen Lien algebran esitys* on Lien algebrahomomorfismi Lien algebralle $GL_n(\mathbb{R})$. Vastaavasti määritellään kompleksinen ja yleisen Lien algebran esitys.

Huomautus 3.10. Aikaisemmalta kurssilta tiedämme, että ainakin lineaarisen Lien ryhmän G Lien algebra $\mathfrak{g}$ on vektoriavaruutena tangenttiavaruus T_eG em. sulkein. Tämä on luonnollinen yhteys siinä mielessä, että se säilyttää homomorfismitkin, erityisesti jokaisesta ryhmän G esityksestä $\rho : G \to GL_n(\mathbb{R})$ saadaan Lien algebraesitys $(D\rho)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Tämä yhteys on käännettävissä: Lien ryhmän esitys voidaan rekonstruoida vastaavasta Lien algebran esityksestä. Eksponenttikuvaus on väline tähän tarkoitukseen; itse asiassa $\exp \circ (Df)_e = f \circ \exp$.

Huomautus 3.11. Matriisien eksponenttikuvauksella on mm. seuraavat ominaisuudet:

(1) $\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ suppenee kaikille neliömatriiseille X.
(2) Jos $XY = YX$, niin $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$. (Tämä ei päde mommutoimattomille matreiiseille, vaan niille pätee Hausdorffin ja Campbellin kaava, josta seuraa $\exp X \exp Y = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] +$ ylempiä termejä).)
(3) Edellisestä seuraa
(4) Jos G on lineaarinen Lien ryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra, niin tarpeeksi pieneen 0:n ympäristöön rajoitettuna eksponenttikuvaus on diffeomorfismi jollekin G:n neutraalialkion ympäristölle. Eksponenttifunktion käänteisykuvauksen eli logaritmifunktion määrittelee tavanmukainen logaritmin sarjakehitelmä

$$\log(g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(g-I)^k,$$

joka suppenee jossain ykkösmatriisin ympäristössä.
(5) $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$.
(6) $\exp(gXg^{-1}) = g \exp X g^{-1}$.
(7) Diagonaalimatriisille pätee $\exp \operatorname{diag}(\lambda_i) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_i})$.
(8) $\det \exp X = \exp(\operatorname{Tr} X)$

Todistus. Edellinen kurssi. □

expOmin

Huomautus 3.12. Matriisien eksponenttikuvauksella on lisäksi mm. seuraavat ominaisuudet:

(1) exp on homeomorfismi $\operatorname{Sym}(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n$, missä $\operatorname{Sym}(n,\mathbb{R}) = \{X \in M^{n\times n} \mid X$ on reaalinen ja symmetrinen$\}$ ja $P_n = \{X \in \operatorname{Sym}(n,\mathbb{R}) \mid X$ on positiividefiniitti.$\}$
(2) Eksponenttikuvauksen derivaatta origon kohdalla on $(D\exp)_0 = I$. (Käänteiskuvauslauseen mukaan exp siis on lokaali diffeomorfismi origon kohdalla.)

(3) Eksponenttikuvauksen derivaatta kohdassa A on

$$(D\exp)_A X = \exp A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} (\operatorname{ad} A)^k X,$$

missä $\operatorname{ad} A\, X = [A, X] = AX - XA$ ja siis $(\operatorname{ad} A)^2\, X = [A, [A, X]]$ jne.

Todistus. (1) Sivuutetaan. (2) on helppo ja sitäpaitsi seuraa kohdasta (3). (3) saadaan derivoimalla sarja termeittäin. Ero reaali- tai kompleksimuuttujan eksponenttifunktion derivointikaavaan johtuu siitä, että matriisin potenssikuvauksen $P_k : X \mapsto X^k$ derivaatta kohdassa A on

$$(DP_k)_A X = \frac{d}{dt}(S + tX)^k \Big|_{t=0} = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} X A^j.$$

□

Huomautus 3.13. Eksponenttikuvaus voidaan määritellä myös ilman sarjakehitelmää, vieläpä tavalla, joka yleistyy kaikille Lien ryhmille. Matriisien eksponenttikuvauksella on mm. seuraavat ominaisuudet:

(1) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ on sileä kuvaus.
(2) $0 \mapsto e \in G$
(3) $(D\exp)_0 = Id_{\mathfrak{g}}$.

Nämä eivät kuitenkaan yksin riitä määräämään eksponenttifunktiota yksikäsitteisesti, eihän funktiosta ole origonympäristön ulkopuolella ole oletettu muuta kuin sileys.

Ei ole muutenkaan yllättävää, että määritelmä **??** on vielä puutteellinen, eihän siinä lainkaan esiinny Lien algebran $\mathfrak{g}$ sulkeita sen enempää kuin ryhmän G laskutoimitustakaan.

Lien ryhmille eksponenttikuvauksen määrittelevä ominaisuus on, että asetetaan yllä asetettujen ehtojen (1), (2) ja (3) lisäksi vaatimus, että eksponettifunktion pitää olla seuraavassa mielessä luonnollinen:

expAd (4) Jos $f : G \to H$ on Lien ryhmien homomorfismi, niin kaavio

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \exp\uparrow & \cdot & \uparrow\exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_e f} & \mathfrak{h} \end{array}$$

kommutoi eli $\exp \circ (Df)_e = f \circ \exp$.(Ks. 3.20)

Huomautus 3.14. Yleisen Lien ryhmän Lien algebrassa eksponenttikuvauksen konstruktio ja yksikäsitteisyystodistus perustuu siihen, että Lien algebran alkio ensin tulkitaan (vaseninvariantiksi) vektorikentäksi Lien ryhmällä ja käytetään sitten tietoa, että moniston sileällä nollakohdattomalla vektorikentällä ainakin lokaalisti on olemassa *vektorikentän virtaus* eli integraali, joka on sellainen funktio $F :]a, b[\times M \to M$, että jokaisen *integraalikiäyrän* eli osittaiskuvauksen $t \mapsto x(t) = F(t, x_0)$ derivaatta hetkellä t eli "virtauksen nopeusvektori" on sama kuin annettu vektori $x(t) = F(t, x_0)$. Integraalikäyrät ovat siis vektorikentän suuntaisia käyriä eli "virtaviivoja" parametrisoituina kentän antamin nopeuksin. Virtauksen avulla määritellään eksponenttikuvaus. Se tapahtuu näin:

$$\exp : \mathfrak{g} \to G : X \mapsto F(1, X).$$

Todistus sille, että tämä toimii, on esitetty Karen Smithin luennoissa, jotka jaettiin kurssin alussa.

Näin saadulla eksponenttifunktiolla **ei tietenkään yleisesti päde laskusääntö** $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$, jonka mukaan exp olisi ryhmähomomorfismi vektoriavaruuden $\mathfrak{g}$ additiividelta ryhmältä ryhmälle G. Seuraava käsite, *yksiparametrinen aliryhmä*, on tämän "puutteen" korvaava idea, jonka mukaan kaikilla $X \in \mathfrak{g}$ rajoittuma $\exp\big|_{\mathbb{R}X}$ on ryhmähomomorfismi $\mathbb{R}X \sim \mathbb{R} \to G$, toisin sanoen kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $X \in \mathfrak{g}$

$$\exp((\lambda + \mu)X) = \exp(\lambda X) \cdot \exp(\mu X).$$

Seuraavassa lauseessa kiinnitetään huomiota siihen, että tämä pätee matriisien eksponenttifunktiolle. Samalla huomataan, ettei lineaarisella Lien ryhmällä ole muita yksiparametrisia aliryhmiä kuin eksponettifunktiosta saadut.

Määritelmä 3.15. Lien ryhmän G *yksiparametrinen aliryhmä*, on Lien[14] ryhmähomomorfismi $\mathbb{R} \to G$.

Lause 3.16. *Olkoon γ Lien ryhmän G yksiparametrinen aliryhmä. Silloin $\forall t \in \mathbb{R}$*

$$\gamma(t) = \exp(tA),$$

missä $A = \gamma'(0)$.

Todistus.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \lim_{s \to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} \\ &= \gamma(t) \lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s) - \gamma(0)}{s} \\ &= \gamma(t)\gamma'(0) = \gamma'(t)\gamma(0) = A\gamma(t),\end{aligned}$$

joten γ toteuttaa differentiaaliyhtälön $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ ja tietenkin myös alkuehdon $\gamma(0) = I$. Eksponenttifunktio $t \mapsto \exp(tA)$ toteuttaa tietenkin sekä yhtälön että alkuehdon (Harjoitustehtävä(11)). Muita ratkaisuja ei ole, sillä jos γ on ratkaisu, niin matriisitulon derivoimiskaavan mukaan

$$\tfrac{d}{dt}(\exp(-tA)\gamma(t)) = -A\exp(-tA)\gamma(t) + \exp(-tA)\gamma'(t) = \exp(-tA)(-A\gamma(t) + A\gamma(t)) = 0,$$

joten $\exp(-tA)\gamma(t)$ on vakio, siis $\exp(-tA)\gamma(t) = \exp(-0A)\gamma(0) = I$ ja siis $\exp(tA) = \gamma(t)$. $\square$

[14] Riittää olettaa, että γ on jatkuva. Sileys todistettiin luennolla konvoluution avulla.

Lause 3.17. *Lien ryhmän $G \subset M^{n\times n}$ Lien algebra on*
$$\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G \text{ kaikille } t \in \mathbb{R}\}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä (11). Merkittävää tässä Lien alagebran karakterisoinnissa on, ettei siis muita polkuja kuin eksponenttifunktiosta tulevia, lainkaan tarvita Lien algebran tekoon. Tämän avulla on myös aika helppoa tunnistaa klassisia Lien algebroita. (Harjoitustehtävä(12) □

3.4. Ad, ad **ja** exp **lineaarisessa Lien ryhmässä.**

Huomautus 3.18. Muistetaan aluksi Lien ryhmän G ja sen Lien algebran $\mathfrak{g}$ adjungoitujen esitysten Ad, ad määritelmät (3.5) ja täydennetään niitä:

Olkoon η n-ulotteisen Lien ryhmän G *toiminta konjugointina*: $\eta_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$. Sen derivaatta kohdassa e on bijektiivinen lineaarikuvaus
$$\mathrm{Ad}_g = (d\eta_g)_e : T_eG \to T_eG \text{ eli } \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\,.$$
Lineaarisen Lien ryhmän tapauksessa $\eta_g : h \mapsto ghg^{-1}$ on lineaarikuvauksen rajoittuma, joten sen derivaatalla on sama lauseke:[15]
$$\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : X \mapsto gXg^{-1}.$$
Lien ryhmän G adjungoitu esitys Ad : $g \mapsto (d\eta_g)_e$ on sileä homomorfismi $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \sim \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (Harjoitustehtävä. Ks. myös 3.19.) Sen derivaatta neutraalialkion kohdalla on *Lien algebran $\mathfrak{g}$ adjungoitu esitys*:
$$\mathrm{ad} = (d\,\mathrm{Ad})_e : \mathfrak{g} \to T_I(GL(\mathfrak{g})) : X \mapsto (\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}).$$
Kuvauksen Ad derivaattana ad on lineaarikuvaus Lien ryhmän G tangenttiavaruudelta $\mathfrak{g}$ vektoriavaruuden $GL(\mathfrak{g})$ tangenttiavaruudelle kohdassa I eli avaruudelle
$$T_I(\mathfrak{g})) = \{\text{lineaarikuvaukset } \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\} \sim M_{n\times n}.$$
Vektoriavaruuden $\mathfrak{g}$ Lien sulku on $[X,Y] = \mathrm{ad}_X Y$, ts. $\mathrm{ad}_X = [X,\cdot]$.

Ad2 **Lause 3.19.** *Lineaarisessa Lien ryhmässä pätee kaikille $X \in \mathfrak{g}$:*
$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp tX}\Big|_{t=0} = \mathrm{ad}\,X.$$

Todistus. Lineaarisessa Lien ryhmässä on adjungoidun esityksen lauseke
$$\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} Y = \exp(tX)Y(\exp(-tX),$$
joten
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\exp(tX)Y\exp(-tX)\Big|_{t=0}\\ &= X\exp(tX)Y\exp(-tX)\Big|_{t=0} - \exp(tX)YX\exp(-tX)\Big|_{t=0}\\ &= [X,Y] = \mathrm{ad}_X Y.\end{aligned}$$

[15]Lineaarisessa tapauksessa huomaa suoraankin, että $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$, kun $g \in G$ ja $X \in \mathfrak{g}$, sillä kaikilla t on $\exp(t(gXg^{-1})) = g\exp(tX)g^{-1} \in G$.

□

Seuraava lause vahvistaa, että eksponenttikuvaus toteuttaa huomautuksen 3.13 kohdan (4) vaatimuksen morfismeille Ad *ja* ad.

Adexp **Lause 3.20.** *Olkoon* Exp *eksponenttikuvaus* $\mathfrak{gl}(G) \to \mathrm{GL}(G)$. *Näin merkiten*[16]

$$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}\, X) = \mathrm{Ad}(\exp X).$$

Todistus. Sekä kuvaus $\gamma_1(t) = \mathrm{Exp}(t\,\mathrm{Ad}_X)$ että kuvaus $\gamma_2(t) = \mathrm{Ad}(\exp(tX))$ ovat ryhmän G yhden parametrin aliryhmiä samalla alkuarvolla $\gamma_1'(0) = \gamma_1'(0) = \mathrm{Ad}_X$, joten ne ovat sama kuvaus. (Harjoitustehtävä(12): tarkasta yksityiskohdat.) □

3.5. **Lineaarisen Lien ryhmän Haarin mitta ja Lien algebra.**

invKentt **Lause 3.21.** *Lineaarisen Lien ryhmän G Lien algebra $\mathfrak{g}$ voidaan määritellä seuraavilla yhtäpitävillä tavoilla.*

(1) $\mathfrak{g}$ *on G:n tangenttivaruus kohdassa e, laskutoimituksena* $[X, Y] = \mathrm{ad}_X Y$.
(2) $\mathfrak{g} = \{X \in M^{n\times n} \mid \exp(tX) \in G$ *kaikille* $t \in \mathbb{R}\}$ *laskutoimituksena matriisikertolaskun* $[X, Y] = XY - YX$.
(3) $\mathfrak{g} = \{\xi \in \Xi M \mid \xi$ *in vaseninvariantti*$\}$ *laskutoimituksena moniston vektorikenttien Lien sulkeet. (Vektorikentän vaseninvarianssi määritellään todistuksen alussa.)*

Todistus. Tiedämme jo, että (1) ja (2) antavat saman käsitteen ja että kaikkien sileiden vektorikenttien avaruus on Lien algebra. Kohdan (3) varmistamiseksi kerrataan vaseninvariantin vektorikentän käsite ja muodostetaan injektiivinen Lien algebrahomomorfismi $T_e(G) \to \Xi G : X \mapsto \xi_X$, jonka kuvajoukkona ovat tasan kaikki vaseninvariantit vektorikentät; vektorikenttä $\xi \in \Xi(G)$ on *vaseninvariantti* eli invariantti moniston G diffeomorfismien $L_g : h \mapsto hg$ suhteen, jos kaikilla $g \in G$ pätee

$$(L_g)_*\xi = \xi$$

eli kaikilla $g, h \in G$

$$(dL_g)_h(\xi_h) = \xi_{gh},$$

missä $L_g : G \to G : h \mapsto gh$ on *kertominen vasemmalta* alkiolla g ja $(dL_g)_h : T_hG \to T_{gh}G$ on sen derivaatta eli tangenttikuvaus kohdassa h. Lineaarisen Lien ryhmän tapauksessa L_g on lineaarikuvaus ja siis itsensä derivaatta, joten invarianssiehto saa muodon

$$(L_g)_h(\xi_h) = \xi_{gh}$$

eli yksinkertaisesti

$$g\xi_h = \xi_{gh}.$$

Tämä antaa aiheen määritellä etsitty Lien algebramorfismi $X \mapsto \xi_X$ asettamalla ensin neutraalialkion kohdalla

$$(\xi_X)_e = X$$

[16] $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \{$ lineaarikuvaukset $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\} = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

ja sitten muissa pisteissä

$$(\xi_X)_g = (DL_g)_e(\xi_X)_e = gX.$$

On helppoa todeta, että näin tulee määritellyksi vektorikenttä, selvästikin vaseninvariantti. On myös ilmeistä, että jokainen vaseninvariantti vektorikenttä on tätä muotoa. Koska vasemmalta kertominen on diffeomorfismi, niin sen derivaatta on bijektio, joten $X \neq 0 \implies (\xi_X)_g = (dL_g)_e X \neq 0$ ja siis kuvaus $X \mapsto \xi_X$ on lineaarinen injektio.

Lien sulkeiden säilymisen toteamiseksi vektorikenttät $\xi \in \Xi G$ kannattaa tulkita derivaatioiksi, onhan derivaatioiden $\widetilde{\xi}$ ja $\widetilde{\eta}$ Lien sulje yksinkertaisesti $[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = \widetilde{\xi} \circ \widetilde{\eta} - \widetilde{\eta} \circ \widetilde{\xi}$. Merkitsemme vektorikenttää ξ vastaavaa derivaatiota[17] tässä selvyyden vuoksi $\widetilde{\xi} \in \Xi G$. Muistin virkistykseksi:

$$\widetilde{\xi} : \mathcal{C}^\infty(G) \to \mathcal{C}^\infty G : \quad (\widetilde{\xi} f)(g) = (Df)_g \xi_g.$$

Erityisesti vektorikenttää ξ_X vastaa derivaatio

$$(\widetilde{\xi}_X f)(g) = (Df)_g(\xi_X)_g = (Df)_g(gX).$$

Erityisesti, jos $X \in T_eG$ tulkitaan määritelmän (2) mielessä, siis matriisina, jolla jokainen $\exp(tX) \in G$), niin ketjusäännön mukaan derivoiden (Harjoitustehtävä (12)):

$$(\widetilde{\xi}_X f)(g) = (Df)_g(gX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g \exp tX).$$

Tästä saadaan sulkeiden säilymiskaava. Väite on

$$([\widetilde{\xi}_X, \widetilde{\xi}_Y] f)(g) = (\widetilde{\xi}_{[X,Y]} f)(g).$$

Määritelmän mukaan

$$([\widetilde{\xi}_X, \widetilde{\xi}_Y])(g) = (\widetilde{\xi}_X(\widetilde{\xi}_Y f))(g) - (\widetilde{\xi}_Y(\widetilde{\xi}_X f))(g).$$

Tästä väite seuraa (HT (12)), sillä

$$\begin{aligned}(\widetilde{\xi}_X(\widetilde{\xi}_Y f))(g) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g \exp sX \exp tY) \\ &= (D^2 f)_g(gX, gY) + (Df)_g(gXY).\end{aligned}$$

□

Huomautus 3.22. Nyt kun Lien ryhmän tangenttivektori neutraalialkon kohdalla osataan samaistaa vaseninvarianttiin vektorikenttään, voidaan myös muut tangenttiavaruuden lineaarialgebralliset objektit tulkita vaseninvarianttien kenttien avulla. Erityisesti voidaan tangenttiavaruuden T_eG alternoiva k-lineaarikuvaus $\omega = \omega_e$ tulkita differentiaalimuodoksi asettamalla

$$\omega_g(gX_1, \ldots, gX_k) = \omega(X_1, \ldots, X_k).$$

Tämä on tietenkin ainoa vaseninvariantti k-muoto, joka neutraalialkion kohdalla yhtyy k-lineaarikuvaukseen ω.

[17] Nämä derivaatiot ovat tietenkin 1. kertaluvun differentiaalioperaattoreita, kuten kirjallisuudessa usein sanotaan.

Erityisesti d-ulotteisen lineaarisen Lien ryhmän alternoiva d-lineaarikuvaus ω_e neutraalialkion kohdalla määrää vaseninvariantin d-muodon ω ja edelleen vaseninvariantin Haarin mitan μ, jonka painofunktio on $|\omega|$. Haarin mitat syntyvät siis näin!

Esimerkki 3.23. Kertaamme erään aikaisemman konstruktion (2.2). Tapauksessa, jossa G oli avoin joukko matriiseja, eli kun G voidaan lausua yhdellä kartalla, jokainen d-muoto on koordinaatein

$$\omega(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d.$$

Jos merkitään vasemman siirrron L_g Jacobin determinanttia JL_g:llä, niin siirretty d-muoto on koordinaateissa lausuttuna

$$\omega(gx) JL_g(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d.$$

Jotta mitta $|\omega|$ olisi vaseninvariantti, on siis painofunktiolle oltava kaikilla g ja $x \in G$

$$\omega(gx) JL_g(x) = \pm\omega(x),$$

erityisesti siis — valitsemalla $x = e$: $\omega(g)JL_g(e) = \pm\omega(e)$ ja muuttujan nimen vaihtaen

$$\omega(x)JL_e(x) = \pm\omega(e) = \text{ eli vakio } C.$$

Vaseninvariantiksi Haarin mitaksi käy siis tässä tapauksessa differentiaalimuodon

$$d\mu(x) = \frac{C}{|JL_x(e)|}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$$

määräämä mitta.

Seurava lause antaa yhteyden lineaarisen Lien ryhmän adjungoidun esityksen ja Haarin mittaan liittyvän modulifunktion välille:

detAd **Lause 3.24.** $\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}(g^{-1})|$

Todistus. Olkoon ω d-ulotteisen lineaarisen Lien ryhmän vaseninvariantti d-muoto ja μ sen määräämä vaseninvarianttin Haarin mitta ja $g \in G$. Tarkastellaan sisäistä automorfismia eli konjugointikuvausta

$$x \mapsto \varphi(x) = gxg^{-1},$$

joka on lineaarikuvauksen rajoittuma, joten sen derivaatta neutraalialkion kohdalla on kuvaus $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : X \mapsto gXg^{-1}$. Osoitetaan aluksi suoraan laskemalla, että

$$\varphi^*\omega = \det \mathrm{Ad}_g\, \omega.$$

Olkoot $X_1, \ldots, X_d \in T_eG = \mathfrak{g}$ ja $x \in G$. Vaseninvarianssista saadaan

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\omega)_x(xX_1, \ldots, xX_d) &= \omega_{\varphi(x)}(\mathrm{Ad}_g(xX_1), \ldots, \mathrm{Ad}_g(xX_d)) \\
&= \omega_{gxg^{-1}}(g(xX_1)g^{-1}, \ldots, g(xX_d)g^{-1}) \\
&= \omega_{gxg^{-1}}(gxg^{-1}\,\mathrm{Ad}_g X_1, \ldots, gxg^{-1}\,\mathrm{Ad}_g X_d) \\
&= \omega_e(\mathrm{Ad}_g X_1, \ldots, \mathrm{Ad}_g X_d) \\
&= \det \mathrm{Ad}_g\, \omega_e(X_1, \ldots, X_d) \\
&= \det \mathrm{Ad}_g\, \omega_x(xX_1, \ldots, xX_d)
\end{aligned}$$

d-ulotteisella ryhmällä G vaseninvariantti d-muoto ω määrää vaseninvariantin eli Haarin mitan μ. Sen suhteen on kaikilla jatkuvilla kompaktikantajaisilla $f : G \to \mathbb{C}$ voimassa

$$\int_G f(gxg^{-1})\, d\mu(x) = |\det \mathrm{Ad}_{g^{-1}}| \int_G f(x)\, d\mu(x),$$

joten $\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}_{g^{-1}}|$. □

Seuraus 3.25. *G on unimodulaarinen eli sen vasen ja oikeainvariantti mitta ovat sama, jos jokin seuraavista ehdoista täyttyy:*

(1) $\mathrm{Ad}(G)$ *on kompakti.*
(2) G *on yhtenäinen ja* $\mathfrak{g}$ *on* nilpotentti*, ts. on olemassa luku* $n \in \mathbb{N}$ *siten, että*

$$[\ldots[[X_1, X_2], X_3] \ldots, X_n] = 0 \text{ kaikille } X_j \in /g.$$

(3) $\mathfrak{g}$ *on puoliyksinkertainen eli semisimppeli (Tätä käsitettä ei ole määritelty. Asiaan plattaneen.)*

Todistus. (1) Harjoitustehtävä (11).

(2) Olkoon $X \in \mathfrak{g}$. Kuvaus $\mathrm{ad}_X = [X, \cdot]$ on *nilpotentti*, toisin sanoen suurilla n $(\mathrm{ad}_X)^n = 0$. Siksi $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X) = 0$, joten

$$\det \mathrm{Ad}(\exp X) = \det \exp \mathrm{ad}\, X = e^{\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X)} = 1.$$

Koska exp on bijektio eräältä 0:n ympäristöltä eräälle e:n ympäristölle, on e:llä siis ympäristö, jossa $\det \mathrm{Ad}(g) = 1$. Mutta Ad on jatkuva homomorfismi, samoin det, joten yhdistetyn homomorfismin ydin

$$H = \{g \in G \mid \det \mathrm{Ad}(g) = 1\}$$

on suljettu aliryhmä, mutta myös avoin, koska e:llä on ympäristö, jossa $\det \mathrm{Ad}(g) = 1$ (Huomaa Ad:n lauseke!)[18] Koska G on yhtenäinen, niin siis $H = G$.

(3) Sivuutetaan koska käsite määrittelemättä. □

Lause 3.26. *Olkoon ω d-ulotteisen lineaarisen Lien ryhmän vaseninvariantti d-muoto ja*

$$x \mapsto \varphi(x) = x^{-1},$$

[18] Mieti vielä.

Käänteisen muodostamiskuvaus. Silloin

$$\varphi^*\omega = \det(-\operatorname{Ad}(g))\omega.$$

Todistus. Harjoitustehtävä (12). Tämä antaa vaihtoehtoisen todistuksen lauseelle 3.24.

Seuraava lause antaa lausekkeen minkä tahansa lineaarisen Lien algebran Haarin mitalle.

Lause 3.27. *Oloon* exp *diffeomorfismi Lien algebran /g origon* 0*:n yhtenäiseltä ympäristöltä* U *alkuperäisen lineaarisen Lien ryhmän neutraalialkion* e *ympäristölle* $V = \exp U$*. Olkoon* λ *Lebesguen mitta Lien algebralla /g. Silloin Haarin mitta* G *on* μ *siten, että kaililla* f*, joilla* $\operatorname{supp} f \subset V$*, on*

$$\int_G f(g)\, d\mu(g) = C \int_{\mathfrak{g}} f \exp X) \det A(X)\, d\lambda(X),$$

missä C *on vakio ja*

$$A(X) = \frac{I - \exp(-\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X}.$$

Erityisesti, jos $\mathfrak{g}$ *on nilpotentti, niin tässä* $A(X) = 1$*.*

Todistus. Olkoon ω d-ulotteisen lineaarisen Lien ryhmän vaseninvariantti d-muoto ja μ sen määräämä vaseninvarianttin Haarin mitta. Tarkastellaan eksponenttifunktiota

$$x \mapsto \varphi(x) = \exp x.$$

Ylätähden määritelmän mukaan

$$(\varphi^*\omega)(Y_q, \dots, Y_d) = \omega_{\exp X}((D\exp)_X Y_1, \dots, (D\exp)_X Y_d).$$

Olemme laskeneet eksponenttifunktion derivaatan kohdassa 3.12 ja lausuneet tuloksen sarjana. Kehittämällä myös alla olevan lausekkeen sarjaksi huomasimme, että itse asiassa

$$(D\exp)_A = L_{\exp A} \circ \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}_A)}{\operatorname{ad}_A},$$

missä $\operatorname{ad}_A X = [A, X]$. Tätä käyttäen saa

$$\begin{aligned}(\varphi^*\omega)(Y_q, \dots, Y_d) &= \omega_{\exp X}(\exp X A(X) Y_1, \dots, \exp X A(X) Y_d)\\ &= \omega_e(A(X)Y_1, \dots, A(X)Y_d)\\ &= \det A(X)\omega_e(Y_1, \dots, Y_d).\end{aligned}$$

Tulos saadan siis integraalin muuttujanvaihtokaavasta, kunhan vielä huomataan, ettei merkki aiheuta ongelmia, vaan $\det A(X) > 0$, ja tämähän saadaan siitä, että $\det A(X)$ on jatkuva, reaalinen, nollasta eroava, ja U oletettiin yhtenäiseksi. $\square$

4. Katsaus kompaktien lineaaristen Lien ryhmien esityksiin

Yleistä taustatietoa ryhmien, erityisesti äärellisten ryhmien ja joidenkin Lien ryhmien esityksitä saa vaikkapa Karen Smithin luennoista.

Seuraavassa esitetään pääkohdat kompaktien Lien ryhmien esitysteoriasta, joka on melko suora yleistys äärellisten ryhmien esitysteoriasta. Äärelliset ryhmät ovatkin tulkittavissa 0-ulotteisiksi Lien ryhmiksi, joissa Haarin mittana on lukumäärä, normeerattuna Haarin mittana tietenkin lukumäärä jaettuna koko ryhmän alkioiden lukumäärällä. Olennaista on, että Haarin mitta antaa mahdollisuuden laskea keskiarvoja yli ryhmän G.

4.1. **Esityksen unitarisointi.**

Määritelmä 4.1. Lien ryhmän G *esitys* on jatkuva homomorfismi

$$\eta : G \to \mathcal{L}(V),$$

missä V on (seuraavassa) Hilbertin avaruus ja $\{\mathcal{L}(V)$={jatkuvat kääntyvät lineaarikuvaukset eli operaattorit $V \to V\}$ varustettuna operaattorinormilla.

Esitys on *unitaarinen*, mikäli jokainen η_g on unitaarinen kuvaus eli isometrinen isomorfismi $V \to V$.

Määritelmä 4.2. Lien ryhmän G esitys η on *redusoituva*, jos on olemassa sen aito *aliesitys* eli jos on olemassa suljettu[19] *invariantti aliavaruus* $\{0\} \neq W \subsetneq V$, mikä puolestaaan tarkoittaa, että kaikilla $g \in G$

$$\eta_g(W) \subset W,$$

jolloin $g \mapsto \eta_g \big|_W$ on G:n esitys avaruudessa W.

Määritelmä 4.3. Kaksi Lien ryhmän G esitystä $\eta_1 ja \eta_2$ ovat *isomorfisia* ja samaistetaan yleensä, jos on olemassa jatkuva lineaarinen bijektio $A : V_1 \to V_2$ siten, että kaikilla $g \in G$

$$A \circ (\eta_1)_g = (\eta_2)_g \circ A.$$

Huomautus 4.4. Huomaa, että yksilotteinen esitys on aian redusoitumaton. Kompaktien ryhmien esitysteoria johtaa siihen, että löydetään muutkin redusoitumattomat esitykset ja lausutaan kaikki muut esitykset niiden suorina summina.

Huomautus 4.5. Jos W on invariantti (ja suljettu), niin on olemassa myös *tekijäesitys* $G \to \mathcal{L}(V/W)$.

Lause 4.6. *Jos esitys η on unitaarinen ja W on invariantti, niin W:n ortogonaalinen komplementti $W^\perp$ on myös invariantti.*

(Jos W on suljettu, niin tämä merkitsee, että

$$V = W \oplus W^\perp$$

[19] Pitääkö olettaa?

ja η on tässä mielessä suora summa *aliesityksistään avaruuksilla W ja $W^\perp$. Matriiseiksi tulkittuna, mikä on luontevaa erityisesti äärellisulotteisessa tapauksessa, esitys η siis tällöin hajoaa kahdeksi blokiksi lävistäjällä. Lisäksi $W^\perp$ on tällöin isomorfinen tekijäavaruuden V/W kanssa – samoin vastaavat esitykset.)*

Todistus. Helppo Harjoitustehtävä □.

Seuraava lause on oleellinen. Se sanoo, että *kompaktin ryhmän* tapauksessa jokainen *äärellisulotteinen* esitys voidaan tulkita unitaariseksi ja sillä on siis edellisen mukaan invariantti komplemettiavaruus — esitys ”redusoituu täydellisesti”. Lyhyt todistus perustuu Haarin mittaan:

Lause 4.7. *Olkoon G kompakti Lien ryhmä ja η sen äärellisulotteinen esitys. Silloin on olemassa ”korjattu” sisätulo avaruudessa V siten, että η on sen suhteen unitaarinen.*

Todistus. Etsityksi sisätuloksi kelpaa

$$(u|v)_\eta = \int_G (\eta_g u|\eta_g v)\, d\mu(g). \quad \square$$

.

Seuraus 4.8. *Olkoon G kompakti Lien ryhmä ja η sen äärellisulotteinen esitys. Silloin jokaisella invariantilla aliavaruudella on invariantti komplementtiavaruus ja koko esitys hajoaa suoraksi summaksi redusoitumattomista esityksistä, jolloin*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\nu.$$

Todistus. Toistetaan edellisiä lauseita kunnes prosessi päättyy - viimestään näin käy, kun kaikki jäljellä olevat invariantit aliavaruudet ovat 1-ulotteisia. □

Schur

4.2. **Schurin lemma.** Seuraava lause, kuuluisa *Schurin lemma* on syy siihen, että kompleksikertoiminen esitysteoria on helpompaa kuin reaalinen.

Lause 4.9 (Schurin lemma)**.**

(1) *Olkoon G kompakti Lien ryhmä ja η_1 ja $\eta_1 2$ sen äärellisulotteisia redusoitumattomia (!) esityksiä ja A lineaarikuvaus (ei oleteta in- eikä surjektiivisuutta) $A : V_1 \to V_2$ siten, että kaikilla $g \in G$*

$$A \circ (\eta_1)_g = (\eta_2)_g \circ A.$$

Silloin A on isomorfismi tai nollakuvaus.

(2) *Olkoon G kompakti Lien ryhmä ja η sen äärellisulotteinen* **kompleksilineaarinen** *redusoitumaton esitys ja A lineaarikuvaus (ei oleteta in- eikä surjektiivisuutta) $A : V \to V$ siten, että kaikilla $g \in G$*

$$A \circ \eta_g = \eta_g \circ A.$$

Silloin on olemassa luku $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että

$$A = \lambda I.$$

Todistus. (1) seuraa siitä, että A:n ydin ja kuvajoukko ovat invariantteja, siis redusoitumattomuuden vuoksi joko $= V$ tai $= \{0\}$.

(2) seuraa siitä, että kuvausta A edustavan matriisin karakteristisella polynomilla on aina kompleksinen nollakohta, joka siis on A:n kompleksinen ominaisarvo. Nyt $A - \lambda I$ ei ole isomorfismi eli kääntyvä. Mutta

$$(A - \lambda I) \circ \eta_g = \eta_g \circ (A - \lambda I),$$

joten kohdan (1) mukaan $A - \lambda I$ on 0, koska se ei ole isomorfismi. □

Seuraus 4.10. *Kommutatiivisen kompaktin Lien ryhmän kompleksinen redusoitumaton esitys on yksiulotteinen.*

Todistus. Valitse $A = \eta_h$. □

karakteeri

Määritelmä 4.11. Ryhmän G *karakteeri* on jatkuva ryhmähomomorfismi

$$\chi : G \to \mathbb{C}$$

Esimerkki 4.12. Ryhmän $G = SO(2)$ karakteerit ovat kuvaukset

$$\chi_m(\theta) = e^{im\theta} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Huomautus 4.13. Myös Lien algebroille voi määritellä ja todistaa vastaavat asiat, etenkin Schurin lemman.

4.3. **Kompaktit itseadjungoidut operaattorit.**

Huomautus 4.14. Seuraavassa käsitellään ääretönulotteisia esityksiä. Sitä varten on hyvä tuntea pääasiat kompakteista itseadjungoiduista operaattoreista. Listaamme tähän tärkeimmät (ks. Funktionaalianalyysi).

(1) Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}$ käytetään lineaarikuvauksille *operaattorinormia*

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\|.$$

(2) *Rieszin esityslauseen* mukaan Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}$ jatkuva lineaarimuoto on aina muotoa $u \mapsto (u|v)$, erityisesti, jos $A :\in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, niin on olemassa *adjungaatti* $v = A^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ s.e. kaikille $u, v \in \mathcal{H}$

$$(Au|v) = (u|A^*v).$$

Tällöin $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\|A\| = \|A^*\|$, $A^{**} = A$.

(3) A on *itseadjungoitu*, jos $A^* = A$ $(Au|v) = (u|Av)$ eli kaikille $u, v \in \mathcal{H}$. Tällöin
   (a) A:n ominaisarvot ovat reaalisia.
   (b) A:n ominaisvektorit ovat ortogonaalisia.
   (c) $\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} (Au|u)|$.
   (d) A:n ominaisarvot ovat reaalisia.

(4) A on *kompakti*, jos 1-pallon (ja siis jokaisen rajoitetun joukon) kuvan sulkeuma on kompakti.
   (a) Erityisesti jokaisen rajoitetun jonon kuvajonolla on silloin suppeneva osajono.

(b) Kompaktien operaattorien joukko on suljettu ideaali avaruudessa $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
(c) Diagonaalioperaattori on kompakti tasan silloin, kun diagonaalialkioiden jono suppenee nollaan.

(5) Jos A on kompakti ja itseadjungoitu,niin joko $\|A\|$ tai $-\|A\|$ onb sen ominaisarvo — erityisesti on olemassa ominaisarvo (!).
(6) Pätee *spektraalilause*[20], jonka mukaan kompaktin itseadjungoidun operaattorin nollasta eroavat ominaisarvot muodostavat nollaan suppenevan (tai päättyvän) jonon $(\lambda_j)_j$, vastaavat ominaisavaruudet ovat äärellisulotteisia ja, jos projektiota ominaisavaruudelle W_{λ_j} merkitään P_j, niin

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j,$$

missä summa suppenee normitolopogiassa (tai on äärellinen).

Lause 4.15. *Hilbertin avaruuden yksikköpallo ei ole kompakti ellei avaruus ole äärellisulotteinen.*

Todistus. Muuten siinä on ääreön ortonormaali jono. □

4.4. **Esitysten ortogonaalirelaatiot.**

Määritelmä 4.16. Seuraavassa edelleen G on kompakti Lien ryhmä, μ sen normeerattu Haarin mitta, $(\eta, \mathcal{H})$ sen unitaarinen, siis erityisesti kompleksilieaarinen esitys. Liitetään jokaiseen vektoriin $v \in \mathcal{H}$ operaattori

$$K_v : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \; : w \mapsto \int_G (w|\eta_g v)\eta_g v \, d\mu(g)$$

eli kaikilla $w, w' \in \mathcal{H}$

$$(K_v w|w') = \int_G (w|\eta_g v)\overline{(w'|\eta_g v)} \, d\mu(g)$$

Kv **Lause 4.17.** *Operaattoreilla K_v on seuraavat ominaisuudet:*

(1) $\|K_v\| \leq \|v\|^2$,
(2) K_v *on itseadjungoitu,*
(3) K_v *on kompakti,*
(4) $(K_v w|w) \geq 0$,
(5) *jos* $v \neq 0$, *niin* $(K_v v|v) \geq 0$ *ja siis* $K_v \neq 0$,
(6) *ja ennen kaikkea:* K_v kommutoi esityksen η kanssa*, ts. kaikilla* $g \in G$, $v \in \mathcal{H}$*:*

$$K_v \eta_g = \eta_g K_v$$

[20] Tästä on muitakin versioita.

Todistus. (1) $\|K_v\| \leq \|v\|^2$, sillä kaikilla $w, w' \in \mathcal{H}$,

$$
\begin{aligned}
|(K_v w|w')| &\leq \int_G |(w|\eta_g v)||(w'|\eta_g v)||d\mu(g) \\
&\leq \int_G \|w\|\|\eta_g v\|\|w'\|\|\eta_g v\|\|d\mu(g) \\
&\leq \int_G \|w\|\|v\|\|w'\|\|v\|\, d\mu(g) \\
&\leq \|v\|^2\|w\|\|w'\| \int_G d\mu(g) = \|v\|^2\|w\|\|w'\|.
\end{aligned}
$$

(2) K_v on itseadjungoitu, sillä kaikilla $w|w' \in \mathcal{H}$: $(K_v w|w') = \int_G (w|\eta_g v)\overline{(w'|\eta_g v)}\, d\mu(g)$ ja $(w|K_v w') = \overline{(K_v w'|w)} = \overline{\int_G (w'|\eta_g v)\overline{(w|\eta_g v)}\|d\mu(g)} = \int_G (w|\eta_g v)\overline{(w'|\eta_g v)}\, d\mu(g)$

(3) K_v on kompakti, sillä operaattorit $w \mapsto (w|\eta_g v)\eta_g v$ ovat kuvauksia yksiulotteisille avaruuksille, joten niiden summat ovat äärellisulotteisia, siis kompakteja. Integraali[21] K_v on tällaisten summien raja-arvo operaattorinormin topologiassa, siis kompakti, koska kompaktien operaattorien joukko on suljettu.

(4) $(K_v w|w) \geq 0$, sillä $(K_v w|w) = \int_G |(\eta_g v|w)|^2\, d\mu(g) \geq 0$.

(5) Jos $v \neq 0$, niin $(K_v v|v) = \int_G |(\eta_g v|v)|^2\, d\mu(g) > 0$, koska ainakin $(\eta_I v|v) = \|v\|^2 > 0$ ja integroitava on jatkuva[22]

(6) Kaikilla $h \in G$ on η_h unitaarinen ja mitta μ on vaseninvariantti, joten kaikilla $h \in G$, $w \in \mathcal{H}$:

$$
\begin{aligned}
K_v(\eta_h w) &= \int_G (\eta_h w|\eta_g v)\eta_g v\, d\mu(g) \\
&= \int_G (w|\eta_h^{-1}\eta_g v)\eta_g v\, d\mu(g) = \\
&= \int_G (w|\eta_{(h^{-1}g)} v)\eta_g v\, d\mu(g) = \\
&= \int_G (w|\eta_{(h^{-1}g)} v)\eta_{(hh^{-1}g)} v\, d\mu(h^{-1}g) = \\
&= \int_G (w|\eta_{(h^{-1}g)} v)\eta_h\eta_{(h^{-1}g)} v\, d\mu(h^{-1}g) = \\
&= \eta_h \int_G (w|\eta_{(h^{-1}g)} v)\eta_{(h^{-1}g)} v\, d\mu(h^{-1}g) = \eta_h K_v(w). \quad \square
\end{aligned}
$$

Lause 4.18. *Edellisen lauseen ehdoin esityksellä η on nollasta eroava äärellisulotteinen aliesitys. Erityisesti siis, jos η on redusoitumaton, niin η on äärellisulotteinen.*

Todistus. Valitaan $v \in H \setminus \{0\}$. Operaattori K_v on silloin nollasta eroava, itseadjungoitu ja kompakti, joten sillä on nollasta eroava ominaisarvo $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Koska K_v on

[21] Hommataan liite HJilbert-arvoisten jatkuvien funktioiden integraaleista.

[22] ja tutkimiemme Haarin mittojen painofunktio on jatkuva ja kaikkialla positiivinen. Onko parempaa todistusta?

kompakti, sillä ei voi olla äärtetönulotteista ominaisavaruutta, vaan ominaisarvoon λ_1 liittyvä ominaisavaruus $V \subset \mathcal{H}$ on äärellisulotteinen.

Koska jokainen η_g kommutoi K_v:n kanssa, niin $\eta_g(V) \subset V$, sillä kaikille $\eta_g(v) \in \eta_g V$ on $A\eta_g(v) = \eta_g A(v) = \eta_g \lambda(v) = \lambda \eta_g(v)$, joten $\eta_g(v) \in V$. Siis V on esityksen η invariantti aliavaruus. □

Pola **Lause 4.19.** *Jos esitys on edellisen lauseen ehtojen lisäksi redusoitumaton ja merkitään* $\dim \mathcal{H} = d$ $(< \infty)$*, niin kaikilla* $u, v, u', v \in \mathcal{H}$*:*

$$\int_G |(\eta_g u|v)|^2 \, d\mu(g) = \frac{1}{d}\|u\|^2\|v\||^2 \text{ ja yleisemminkin}$$

$$\int_G (\eta_g u|v)\overline{(\eta_g u'|v')} \, d\mu(g) = \frac{1}{d}(u|u')\overline{(v|v')}.$$

Todistus. Olkoon $v \in \mathcal{H}$. Lauseen 4.17 mukaan operaattori $K_v : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : u \mapsto \int_G (u|\eta_g v)\eta_g v \, d\mu(g)$ kommutoi esityksen η kanssa. Olemme lisäksi olettaneet, että η on redusoitumaton, joten Schurin lemman 4.2 mukaan on itse asiassa olemassa vakio $\lambda = \lambda(v) \in \mathbb{C}$ [23], jolle

$$K_v = \lambda(v)I.$$

Siis kaikilla $v, w, w' \in \mathcal{H}$ pätee

$$\int_G (w|\eta_g v)\overline{(w'|\eta_g v)} \, d\mu(g) = (K_v w|w') = (\lambda(v)w|w') = \lambda(v)(w|w').$$

Valitsemalla $w = w' = u$ saadaan

$$\int_G |(u|\eta_g v)|^2 \, d\mu(g) = \int_G (u|\eta_g v)\overline{(u|\eta_g v)} \, d\mu(g) = \lambda(v)(u|u) = \lambda(v)\|u\|^2.$$

Vaihtamalla u:n ja v:n roolit saamme

$$\int_G |(v|\eta_g u)|^2 \, d\mu(g) = \lambda(u)\|v\|^2.$$

Seurauksen 2.7 mukaan vasemmat puolet ovat samat, sillä kompakti ryhmä on unimodulaarinen, joten

$$\int_G |(v|\eta_g u)|^2 \, d\mu(g) = \int_G |(\eta_g^* v|u)|^2 \, d\mu(g) = \int_G |(u|\eta_{(g^{-1})} u)|^2 \, d\mu(g) \stackrel{2.7}{=} \int_G |(u|\eta_g v)|^2 \, d\mu(g).$$

Siis

$$\lambda(v)\|u\|^2 = \lambda(u)\|v\|^2,$$

joten $\frac{\lambda(u)}{\|u\|^2}$ on vakio λ_0, eli

$$\lambda(u) = \lambda_0\|u\|^2.$$

Väitteen todistamiseksi riittää määrätä vakio λ_0.

Olkoon $(e_1, \ldots, e_d)$ avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaali kanta, jolloin unitaarisuuden takia

$$\|u\|^2 = \|\eta_v u\|^2 = \sum_{j=1}^{d} |(\eta_g u|e_i)|^2.$$

[23] Koska K_v on itseadjungoitu, niin tietenkin $\lambda(v) \in \mathbb{R}$.

Integroimalla tämä yli ryhmän G saadaan siis

$$\|u\|^2 = \int_G \|u\|^2 \, d\mu(g) = \sum_{j=1}^{d} \int_G |(\eta_g u|e_i)|^2 = n\lambda_0 \|u\|^2 \|e_i\|^2 = n\lambda_0 \|u\|^2,$$

joten $\lambda_0 = \frac{1}{d}$, kuten väitettiinkin.

Lauseen toinen kaava saadaan ensimmäisestä funktionaalianalyysin *polarisointikaavalla*, joka antaa sisätulot normeista (Ks. FAN).

□

Seuraus 4.20. (Schurin ortogonaalisuusrelaatiot - osa 1) *Edellisen lauseen tilanteessa η on äärellisulotteinen esitys, joten sillä on $\mathcal{H}$:n ortonormaalissa kannassa matriisiesitys: $\eta_g = (\eta_{ij}(g))_{i,j=1}^n$, missä $\eta_{ij}(g) = (\eta_g e_i|e_j)$.*

a) Sijoittamalla lauseen 4.19 toiseen kaavaan $u = e_i$, $v = e_j$, $u' = e_k$, $v' = e_k$ saa

$$\int_G \eta_{ij}(g)\overline{\eta_{kl}(g)} \, d\mu(g) = \frac{1}{d}\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

b) Kun $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ovat lineaarikuvauksia, niin

$$\int_G \mathrm{Tr}(A\eta_g)\overline{\mathrm{Tr}(B\eta_g)} \, d\mu(g) = \frac{1}{d}\,\mathrm{Tr}(AB^*),$$

sillä tämä kaava saadaan yksiulotteisille operaattoreille A ja B lauseesta 4.19 oleellisesti samalla tavalla kuin a), ja yleistyy äärellisulotteisille lineaarikuvauksille, koska ne ovat yksiulotteisten lineaarikombinaatioita ja Tr *on lineaarikuvaus.*

Seuraus 4.21. (Schurin ortogonaalisuusrelaatiot - osa 2)

a) Jos η ja η' ovat edellisen lauseen tapaan kompaktin ryhmän unitaarisia äärellisulotteisia kompleksilineaarisia esityksiä, joilla on on $\mathcal{H}$:n ja vastaavasti $\mathcal{H}'$:n ortonormaalissa kannassa matriisiesitys:

$$\eta_g = (\eta_{ij}(g))_{i,j=1}^n, \text{ missä } \eta_{ij}(g) = (\eta_g e_i, e_j) \quad \text{ja}$$
$$\eta'_g = (\eta_{kl}(g))_{k,l=1}^m, \text{ missä } \eta'_{kl}(g) = (\eta'_g e'_k, e'_l),$$

niin joko η ja η' ovat ekvivalentit tai sitten kaikilla i, j, k, l

$$\int_G \eta_{ij}(g)\overline{\eta'_{kl}(g)} \, d\mu(g) = 0 \quad \text{eli} \quad \eta_{ij} \perp \eta'_{kl}.$$

b) Jos siis merkitään

$$\mathcal{M}_\eta = \langle \{\eta_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\} \rangle = \{g \mapsto (\eta_g u|v) \mid u, v \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{L}^2(G, \mu)$$

ja määritellään vastaavasti $\mathcal{M}_{\eta'} \subset \mathcal{L}^2(G, \mu)$, niin

$$\mathcal{M}_\eta \perp \mathcal{M}_{\eta'}.$$

Todistus. Pyritään soveltamaan Schurin lemmaa 4.2. Keksitään kuvaus $\tilde{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, joka kommutoi esitysten η ja η' kanssa siinä mielessä, että $\tilde{A}\eta_h = \eta'_h\tilde{A}$ kaikille $h \in G$. Konstruktio: Valitaan mikä tahansa lineaarikuvaus $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ja asetetaan sen jälkeen

$$\tilde{A} = \int_G \eta'_{g^{-1}} A \, \eta_g \, d\mu(g).$$

Tämä toimii, sillä mitta μ on invariantti, joten

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\eta_h &= \int_G \eta'_{g^{-1}} A \, \eta_g \, d\mu(g)\eta_h = \int_G \eta'_{g^{-1}} A \, \eta_g\eta_h \, d\mu(g) \\
&= \int_G \eta'_{g^{-1}} A \, \eta_{gh} \, d\mu(g) = \int_G \eta'_{h(gh)^{-1}} A \, \eta_{gh} \, d\mu(gh) \\
&= \int_G \eta'_{h(gh)^{-1}} A \, \eta_{gh} \, d\mu(gh) = \eta'_h \int_G \eta'_{(gh)^{-1}} A \, \eta_{gh} \, d\mu(gh) = \eta'_h\tilde{A}.
\end{aligned}$$

Koska η ja η ove epäisomorfiset, on siis $\tilde{A} = 0$, olipa A alunperin valittu miten tahansa. Pitäen silmällä tavoitettamme a) valitsemme A:ksi yksiulotteien lineaarikuvauksen

$$Au = (u|v)v'$$

joillekin $v \in \mathcal{H}, v' \in \mathcal{H}'$, jolloin

$$A\eta_g u = (\eta_g u|v)v' \quad \text{ja siis}$$

$$0 = \tilde{A}u = \int_G \eta'_{g^{-1}} A \, \eta_g u \, d\mu(g) = \int_G \eta'_{g^{-1}} (\eta_g u|v)v' \, d\mu(g) = \int_G (\eta_g u|v)\eta'_{g^{-1}} v' \, d\mu(g).$$

Siis

$$\begin{aligned}
0 = (\tilde{A}u|u') &= (\int_G (\eta_g u|v)\eta'_{g^{-1}} v' \, d\mu(g)|u') = \int_G (\eta_g u|v)(\eta'_{g^{-1}} v'|u') \, d\mu(g) \\
&= \int_G (\eta_g u|v)(v'|\eta'_g u') \, d\mu(g) = \int_G (\eta_g u|v)\overline{(\eta'_g u'|v')} \, d\mu(g).
\end{aligned}$$

Lopuksi huomataan, että tietenkin b) on sama asia kuin a). □

4.5. **Peterin ja Weylin lause ja Fourier-sarjat (Ei kuulu kurssiin).**

4.5.1. *Peterin ja Weylin lause.* Seuraava lause kertoo meille, miten kompaktin ryhmän kaikki redusoitumattomat esitykset ovat saman esityksen, oikealta säännöllisen esityksen[24] aliesityksiä.

Määritelmä 4.22. Ryhmän G *oikealta säännöllinen esitys* R on esitys funktioavaruudessa $L^2(G)$, nimittäin

$$R_g(f) : x \mapsto (R_g(f))(x) = f(xg).$$

Vastaavsti määritellään *oikealta säännöllinen esitys* L asettamalla $(L_g(f))(x) = f(g^{-1}x)$.

[24]Nimi, ei ominaisuus.

Huomautus 4.23. Kompaktin ryhmän G oikealta säännöllisellä esityksellä R on seuraavanlaisia ominaisuuksia:

Tarkastellaan kompaktin ryhmän G jotakin redusoitumatonta ja siis äärellisulotteista esitystä η avaruudessa $\mathcal{H} \sim \mathbb{R}^d$, jonka kantaa merkitään $\{e_1, \dots, e_d\}$. Merkitään kantavektorien kuvien koordinaatteja

$$\eta_{ij}(x) = (\eta_x e_j | e_i).$$

Kantavektorien kuvat ovat tämän matriisin sarakkeet ja $x \mapsto \eta_{1j}(x) = (\eta_x e_j | e_1)$ kuvaa siis ryhmän G alkion x sitä esittävän matriisin j:nneksi sarakkeeksi eli j:nnen kantavektorin kuvaksi lineaarikuvauksessa η_x. Olkoon

$$\mathcal{M}_\eta = \langle \{\eta_{ij} \bigm| 1 \le i, j \le n\} \rangle = \{g \mapsto (\eta_g u | v) \bigm| u, v \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{L}^2(G, \mu)$$

ja

$$\mathcal{M}_\eta^{(1)} = \langle \{\eta_{1j} \bigm| j \le n\} \rangle = \{g \mapsto (\eta_g u | v) \bigm| u, v \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{L}^2(G, \mu).$$

Tällöin $M_\eta^{(1)}$ on invariantti oikealta säänöllisen esityksen R suhteen, sillä kaikilla $x,\, g \in G$

$$\eta_{ij}(xg) = \sum_{k=1}^{d} \eta_{1k}(x)\eta_{kj}(g).$$

Lisäksi kuvaus

$$A_x : \sum_{j=1}^{d} c_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{d} c_j \eta_{1j}(x)$$

on isomorfismi $\mathcal{H} \to \mathcal{M}_\eta^{(1)}$ ja toteuttaa Schurin lemman ehdon:

$$A_x \circ \eta_g = R_g \circ A_x,$$

mikä tarkastetaan laskemalla kummankin arvo vektorille $u = \sum_{j=1}^{d} c_j e_j$:

$$\begin{aligned} A_x \circ \eta_g(u) &= A_x \sum_{j=1}^{d} c_j \eta_g e_j = A_x \sum_{j=1}^{d} c_j \left(\sum_{i=1}^{d} \eta_{ij}(g) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \eta_{ij}(g) c_j \eta_{1i}(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j \eta_{1i}(xg) = R_g A_x(u). \qquad \square \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\|Au\|^2 = \frac{1}{d}\|u\|^2.$$

Tietenkin esityksen η muille sarakkeille $\mathcal{M}_\eta^{(i)}$ voidaan antaa sama käsittely ja huomataan, että jokainen $\mathcal{M}_\eta^{(i)}$ on oikealta säännöllisen esityksen R invariantti aliavaruus, johon rajoitettuna R on isomorfiaa vaille sama kuin lkuperäinen redusoitumaton esitys η. Kaikenkaikkiaan oikealta säännöllisen esityksen R rajoittuma koko avaruuteen $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_\eta^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_\eta^{(d)}$ on isomorfiaa vaille sama asia kuin d esityksen suora summa $\eta \oplus \cdots \oplus \eta$, jota voi merkitä $d\,\eta$[25].

[25] d kertaa η

Vastaava tulos saadan vasemmalta säännölliselle esitykselle tarkastelemalla sarakkeiden sijasta rivejä.

Seuraava lause sanoo, missä mielessä kompaktin Lien ryhmän redusoitumattomat esitykset täyttävät koko avaruuden $L^2(G)$.

Lause 4.24 (Peter ja Weyl)**.** *Olkoon $\hat{G}$ sellainen kokoelma kompaktin Lien ryhmän esityksiä, että siihen kuuluu yksi edustaj kustakin isomorfismiluokasta, ts.*

(1) *jokainen $\eta \in \hat{G}$ on redusoitumaton,*
(2) *jokainen ryhmän G redusoitumaton esitys on isomorfinen jonkin $\eta \in \hat{G}$ kanssa*
(3) *esitykset $\eta \in \hat{G}$ eivät ole keskenään isomorfisia.*

Merkitään esityksen $\eta \in \hat{G}$ kertoimien virittämää avaruutta jälleen

$$\mathcal{M}_\eta = \langle \{\eta_{ij} \bigm| 1 \leq i, j \leq n\} \rangle = \{g \mapsto (\eta_g u|v) \bigm| u, v \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{L}^2(G, \mu).$$

Silloin $L^2(G) =$ on (ortogonaalisen!) suoran summan sulkeuma avaruudessa $L^2(G) =$ eli täydentymä

$$\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{\bigoplus_{\eta \in \hat{G}} \mathcal{M}_\eta}.$$

Todistus. Puolen sivun mittainen todistus tehdään osoittamalla, että

$$\mathcal{M}^\perp = \left(\bigoplus_{\eta \in \hat{G}} \mathcal{M}_\eta \right)^\perp = \{0\},$$

ei siis vaikeaa. Huomaa, että suorassa summassa esiintyyvät kaikki äärelliset lineaarikombinaatiot G:n äärellisulotteisten esitysmatriisien kertoimista ja ne ovat jatkuvia funktioita $G \to \mathbb{C}$. □

Seuraus 4.25. *$\mathcal{M}$ on $\|\cdot\|_\infty-$ tiheä kaikkien jatkuvienfunktioiden avaruudessa $\mathcal{C}(G)$.*

Todistus. Tulos perustuu toisaalt Stonen-Weierstrassin lauseeseen, toisaalta pieneen lemmaan, jonka mukaan jokaista $g \in G \setminus \{e\}$ kohti on olemassa äärellisulotteinen esitys, jolla $\eta_g \neq I$. □

4.5.2. *Fourier-sarjoista.*

Määritelmä 4.26. Äärellisulotteisessa[26] sisätuloavaruudessa $\mathcal{H}$ operaattorin $A \in L(\mathcal{H})$ *Hilbert-Schmidt-normi* on

$$|||A||| = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^*)}.$$

[26]Kohta yleistetään

Huomataan, että jos $(a_{ij}) = \operatorname{Mat} A$ jossain $\mathcal{H}$:n ortonormaalissa kannassa, niin $|||A|||^2 = \sum_{i,j=1}^{d} [a_{ij}|^2$, ja siis Hilbert-Schmidt-normi on avaruuden $\mathbb{R}^{d^2}$ euklidinen normi, erityisesti Hilbert-Schmidt-normi siis todella on normi ja vieläpä sisätuloon liittyvä. On rutiiniasia (Harjoitusehtävä!) tarkastaa, että tuo sisätulo avaruudessa $L(\mathcal{H})$ on yksinkertaisesti

$$(A|B) = \operatorname{Tr}(AB^*).$$

Lopuksi huomataan, että samat määritelmät toimivat (separoituvassa) Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}$.

Huomautus 4.27. Muistetaan FAN:sta, että Hilbert-avaruudessa vektorien koordinaatteja ortonormaalin kannan suhteen sanotaan *Fourier-kertoimiksi. Klassiset Fourier-kertoimet* liittyvät kuitenkin paitsi Hilbert-avaruuteen $L^2(\mathrm{SO}(2))$ myös yleisempiin ryhmässä SO(2) integroituviin funktioihin; tietenkin $\mathrm{SO}(2) \sim \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\} \sim \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ on ympyrä. Intergroituvaan funktioon $f \in L^1(\mathrm{SO}(2))$ ja lukuun $m \in \mathbb{Z}$ liittyvä *Fourier-kerroin* on luku

$$\hat{f}(m) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} \, d\mu(x),$$

missä μ on Haarin mitta $\frac{dx}{2\pi}$. Fourier-kertoimet voi avaruudesta $L^2(\mathrm{SO}(2)) \cap L^1(\mathrm{SO}(2))$ jatkaa määritellyiksi Hilbertin avaruudessa $L^2(\mathrm{SO}(2))$, ja sen topologiassa pätee

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{imx}$$

ja on voimassa avaruuksien $L^2(\mathrm{SO}(2))$ ja ℓ^2 isomorfisuuden antava *Plancherelin kaava:*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|^2.$$

Jos f on jatkuva ja Fourier-kertoimien jono suppenee itseisesti, eli on avaruudessa ℓ^1, niin sarja suppenee tasaisesti. Tämä tapahtuu erityisesti aina, kun $f \in \mathcal{C}^1$. Jos f on $\mathcal{C}^\infty$-funktio, niin sen Fourier-kertoimien jono on *nopeasti vähenevä* eli kaikille $k \in \mathbb{N}$ on $\sup_{m \in \mathbb{Z}} |m^k \hat{f}(m)| < \infty$. Sama pätee kääntäen, ja tällöin sarjan saa myös derivoida termeittäin.

Fourier-sarjojen teoria on yleistettävissä muillekin Lien ryhmille kuin ryhmälle SO(2). Työkalu siihen on Peterin - Weylin lause.

Asetetaan seuraava aluksi hämmentävän näköinen määritelmä:

Määritelmä 4.28. Olkoon G kompakit Lien ryhmä ja $(\eta, \mathcal{H}_\eta) \in \hat{G}$ ja merkitään $d_\eta = \dim \mathcal{H}_\eta$.

a) Funktion $f \in L^2(G)$ Fourier-kerroin $\hat{f}(\eta)$ redusoitumattoman esityksen η suhteen on lineaarikuvaus $\hat{f}(\eta) : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$:

$$\hat{f}(\eta) = \int_G f(g) \, \eta_{g^{-1}} \, d\mu(g).$$

b) Funktion $f \in L^2(G)$ *Fourier-sarja* on summa sen redusoitumattoman esitysten ekvivalenssiluokkien (edustajien) suhteen, nimittäin

$$\sum_{\eta\in\hat{G}} d_\eta \operatorname{Tr}(\hat{f}(\eta)\eta_g).$$

Samantien esitetään — nyt ehkä jo aavistuksen vähemmän yllättävä lause:

Lause 4.29. *(Plancherel) Jos $f \in L^2(G)$, niin f on Fourier-sarjansa summa L^2-mielessä:*

$$f(g) = \sum_{\eta\in\hat{G}} d_\eta \operatorname{Tr}(\hat{f}(\eta)\eta_g)$$

Lisäksi funktion kuvaaminen Fourier-kertoimikseen on sisätuloavaruus-isomorfismi (Huomaa Hilbert-Schmidt -normi ja -sisätulo oikealla puolella.):

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\eta\in\hat{G}} d_\eta |||\hat{f}_\eta|||^2.$$

$$(f_1|f_2) = \sum_{\eta\in\hat{G}} d_\eta \operatorname{Tr}((\hat{f}_1)_\eta (\hat{f}_2)^*_\eta).$$

Todistus. Seuraa Peterin-Weylin lauseesta ja Schurin ortogonaalisuuslauseesta. □

Esimerkki 4.30. Jos G on **kommutatiivinen**, niin redusoitumattomat kompleksilineaariset, esitykset ovat yksiulotteisia eli $\hat{G}$ muodostuu kaikista G:n karakteereista (Ks. 4.11) eli jakuvista ryhmähomomorfismeista $\chi : G \to \mathbb{C}^*$. Huomaa, että $|\chi(g)| = 1$ kaikile $g \in G$. Karakteerit muodostavat pisteittäisellä kertolaskulla ryhmän, jota sanotaan G:n *duaaliryhmäksi*. Karakteerit muodostavat ortonormaalin kannan avaruuteen $L^2(G)$.

Tässä tilanteessa funktion $f \in L^2(G)$ Fourier-kerroin esityksen eli karakteerin χ suhteen on

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu(x)$$

ja Fourier-sarja on

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)$$

ja Plancherelin kaava

$$\int_G |f(x)|^2\, d\mu(x) = \sum_{\chi\in\hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.$$

Erityisesti klassisessa tapauksessa $G = \mathrm{SO}(2) = \mathrm{U}(1) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ karakteerit ovat muotoa

$$\chi(\theta) = e^{im\theta},$$

missä $m \in \mathbb{Z}$, joten $\hat{G} \sim \mathbb{Z}$ ja saadaan klassiset kaavat.

4.6. **Rotaatioryhmän esityksistä (Ei kuulu kurssiin).**

4.6.1. *Keskusfunktioista.*

Määritelmä 4.31. Ryhmässä määritelty funktio on *keskusfunktio*, mikäli se saa saman arvon kaikissa samaan konjugattiluokkaan kuuluvissa pisteissä eli on invariantti konjugaatioiden suhteen:$f(x) = f(gxg^{-1})$ kaikilla $x, g \in G$. Toisin sanoen keskusfunktio on itse asiassa määritelty konjugaattiluokkien joukossa.

Esimerkki 4.32. Ryhmän SU(2) alkiot ovat kaikki diagonlisoituvia matriiseja, itse asiassa jokaisella $x \in \mathrm{SU}(2)$ on olemassa $g \in \mathrm{SU}(2)$ siten, että

$$gxg^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}.$$

Ryhmän SU(2) keskusfunktion arvo kohdassa $x = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix}$ riippuu siis ainoastaan x:n ominisarvoista, jotka ovat yksikkö-kompleksilukuja ja toistensa kompleksikonjugatteja. Itse asiassa $f(x)$ riippuu ainoastaan niiden summasta eli x:n jäljestä, sillä $gxg^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$ ovat konjugaattiekvivalentit:, onhan jälkimmäinen $h(gxg^{-1})h^{-1}$, missä h on $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. Koska $\operatorname{Tr} x = e^{-i\phi} + e^{i\phi} \in [-2, 2] \subset \mathbb{R}$, niin on siis jokainen SU(2):n keskusfunktio muotoa $f(\frac{1}{2} \operatorname{Tr} x) = f(\operatorname{Re} \alpha) = f(x_1) = f(\cos\theta)$.

Integroituvan **keskusfunktion** $f(\cos\theta)$ integraali ryhmän SU(2) Haarin mitan suhteen on siis (Vrt. harjoitustehtävät 11)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{SU}(2)} f(x)\, dx(\mu) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin(\varphi) \int_{\psi=0}^{2\pi} f(\cos\theta) \sin^2\theta \, d\theta d\varphi d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\cos\theta) \sin^2\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} f(t) \sqrt{1-t^2}\, dt.
\end{aligned}$$

Huomautus 4.33.

5. Historiaa

1

Alfréd Haar Born: 11 Oct 1885 in Budapest, Hungary Died: 16 March 1933 in Szeged, Hungary

Alfréd Haar's parents were Emma Fuchs and Ignatz Haar. He was brought up in Budapest which at this time was a flourishing city. After the unification of Buda, Obuda and Pest in 1872, thirteen years before Haar's birth, the city became not only the capital of Hungary but also a major centre for industry, trade, communications, and architecture. Most importantly for the young boy, he was growing up in a city which was a centre for education, and intellectual and artistic life.

Haar attended the Gymnasium in Budapest and, as might be expected, he was an outstanding student showing great potential for science. For most of his time at the Gymnasium Haar felt that chemistry was the subject for him but he also did outstanding work in mathematics. In 1894 the school teacher Dániel Arany started editing the Középiskolai Matematikai Lapok, a mathematical problem solving journal for secondary school students. Each issue of the Középiskolai Matematikai Lapok contained a number of selected exercises from mathematics and shortly thereafter from physics, as well as solutions to the past months' problems and a list of those pupils who had sent in correct solutions. Haar collaborated on the journal during his final years at the Gymnasium. In 1903, his final year at the high school, he won first prize in the Eötvös contest in mathematics. This was a defining moment for him for only at this stage did he decide that he would give up his intention of studying chemistry at university and that he would instead pursue a university course in mathematics.

Haar travelled to Germany in 1904 to study at Göttingen and there, after his undergraduate years, he undertook research under Hilbert's supervision. He obtained his doctorate in 1909 with an important dissertation entitled Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. The main results of his thesis appeared in a paper which he published in Mathematische Annalen in the following year. Haar asked a series of fundamental questions about systems of orthonormal functions on the interval [0, 1]. Haar wrote: one wants to be able to determine sufficient conditions that a series of such functions is convergent; one wants examples of relatively sensible functions which do not converge in the pointwise or uniform sense; one wants to understand how summation methods may be used to overcome the problems of divergence; and one wants to know exactly when, if the series of partial sums of an orthogonal expansion of a function converges, its limit equals the original function. He examined the standard systems of orthonormal trigonometric functions and also orthonormal systems related to Sturm-Liouville differential equations. He constructed what is now known as Haar's orthonormal basis to answer the question of divergence of continuous functions expanded as series of orthonormal systems of functions. The paper introduced to the mathematical world what are today called Haar wavelets, an orthogonal system of discontinuous functions admitting at most three values, which Haar had first introduced in an appendix to his doctoral thesis.

Haar was appointed as a Privatdozent at the University of Göttingen immediately after completing his doctoral thesis, and he taught there until 1912 when he returned to Hungary. He was appointed as an extraordinary professor at the Franz Josef Royal Hungarian University in Kolozsvár (which is now Cluj in Romania), then in 1917 he became an ordinary professor there being appointed to one of the two chairs of mathematics in the Faculty of Mathematics and Sciences. Of course World War I had broken out two years after Haar took up his extraordinary professorship in Kolozsvár, and times were very difficult in Hungary. Austro-Hungary was aligned to the Central Powers and during the first three years of the war over one million Hungarians died (in addition to two million Austrians) while, for those not fighting on the front, there were food shortages and high inflation. After capitulating on 3 November 1918, Hungary sought a separate peace, independence from Austria, and proclaimed the country a republic. For a short while the country was ruled by a Communist Government but Romanian troops invaded the country and the government was overthrown. In 1921 the Treaty of Trianon was signed which treated Hungary very severely. Its territory was reduced to only one third of its previous size. The terms of the Treaty meant that Kolozsvár was no longer in Hungary (it became part of Romania), so the University there had to move within Hungarian borders. At first it was sited in Budapest for a temporary period of two years before it moved to Szeged, where there had previously been no university. The Department of Mathematics, consisting of the Mathematical Seminary and the Institute of Descriptive Geometry, began operating in Szeged. The department consisted of Riesz, Haar, Rudolf Ortvay (who held the Chair of Mathematical Physics), and Tibor Radó who had been appointed as Haar's assistant. There were no other assistants in the department at this time but István Lipka became Haar's assistant in 1926.

Haar, together with Riesz, rapidly made a major mathematical centre from the new university. With support from the Society of Friends of the Franz Josef University, they had founded the famous journal Acta Scientiarum Mathematicarum in 1930. Haar and Riesz were the editors and the reputation of the journal was quickly established with mathematicians of the quality of John von Neumann, Norbert Wiener, George D Birkhoff, Henri Cartan, Antoni Zygmund, George Pólya, Paul Erdõs (still a student at the time) publishing a paper in the first volume. They also established the mathematical library again in 1930 and this received mathematics journals from many parts of the world given in exchange for the Acta Scientiarum Mathematicarum .

Most of Haar's work was in analysis. After the work of his thesis, which we gave some details of above, he went on to study partial differential equations with applications to elasticity theory. He also wrote on Chebyshev approximations of functions, linear inequalities, analytic functions, and discrete groups. Between 1917 and 1919 he worked on the variational calculus, proving Haar's Lemma, and applying his results to problems like Plateau's problem [1]:-

A multitude of papers by others show the influence this lemma exerted on the whole area of variational calculus.

Haar is best remembered, however, for his work on analysis on groups. In 1932 he introduced an invariant measure on locally compact groups, now called the Haar measure, which allows an analogue of Lebesgue integrals to be defined on locally compact topological groups. His famous paper Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen (The concept of measure in the theory of continuous groups) appeared in the Annals of Mathematics in 1933. The concept of Haar was used by von Neumann, by Pontryagin in 1934, and Weil in 1940, to set up an abstract theory of commutative harmonic analysis. At first, however, von Neumann tried to discourage Haar in seeking such a measure since he felt certain that no such measure could exist. The following celebrates Haar's achievement:-

Said a mathematician named Haar,
"Von Neumann can't see very far.
He missed a great treasure -
hey call it Haar measure -
Poor Johnny's just not up to par"

Haar died in 1933 at the age of 48 years, having been honoured two years earlier by election to the Hungarian Academy of Sciences. In 1975 Mikolás wrote the paper [8] in which he discussed the work of Fejér, Marcel Riesz, Frigyes Riesz, and Haar. He looks at the question:-

How did the work of a few great mathematicians contribute to the present high level of analytical investigations, to their applications, and, in general, to the intensive mathematical life of today in Hungary?

A memorial relief portrays Haar and Riesz in the National Pantheon in Cathedral Square, Szeged. It describes them as:-

... the world-famous founders of the Szeged mathematical school.

Article by: J J O'Connor and E F Robertson

August 2006
MacTutor History of Mathematics
[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Haar.html]