Matematiikan historia 2000
Harjoitustehtävävalikoima 30/40 OSA I

Muinaiskulttuurit

1. Kirjoita hieroglyyfein $\frac{3}{5}$. (On useita tapoja. Mitä egyptiläiset ehkä suosivat?)

2. Seked on käänteisen kulmakertoimen eli loivuuden (!) yksikkö. Yksi seked vastaa yhden kyynärän nousua yhden kämmenen matkalla.

(1) Mikä on yhtä sekediä vastaava kulmakerroin?
(2) Mikä on vastaava kulma?
(3) Missä kulmassa vanhan valtakunnan aikana rakennettujen Kheopsin ja Khefrenin pyramidien lappeet ovat maahan nähden, kun niiden sekedit ovat $5\frac{1}{2}$ ja $5\frac{1}{4}$?

3. a) Laske tuplaa ja summaa- menetelmällä 63 kertaa 18 ja 18 kertaa 63. Eri lasku!
b) Laske egyptiläisittäin 1/5 kertaa 1/4.

4. Tehtävän tarkoituksena on mm. saada tuntumaa 60-järjestelmän tehokkuuteen. Kuinka kauas on 10 pennin kolikko vietävä, jotta se näkyisi yhden kaarisekunnin kulmassa?

5. a) Kirjoita 60- järjestelmässä luku 12345678987654321
b) Kirjoita saatu luku nuolenpäin.
c) Suorita laskut 60-järjestelmässä:

a) $30, 12; 19 \times 11; 22, 17$
b) $30, 12; 19 \ : \ 3; 2$
c) $\sqrt{19}$ (Pari askelta babylonialaisella algoritmilla. Aloita luvusta 4)

6. Babylonialaisilla oli taulukoituna funktion $n^3 + n^2$ arvoja luonnollisille n. Ratkaise yhtälö

$$15x^3 + 3x^2 = 4$$

palauttamalla se "normaalimuotoon"

$$y^3 + y^2 = c$$

ja käyttämällä sitten (kuviteltua) taulukkoa ja tuloksen tarkentamiseksi vielä lisäksi lineaarista interpolointia.

7. a) Määrää kultaisen leikkauksen jakosuhde.
b) Todista, että säännöllisen viisikannan sivut jakavat toisensa kuvan mukaisesti kultaisen leikkauksen suhteessa.

8. Missä suhteesa kvadratrix jakaa neliön pohjan? Todista väitteesi nykyaikaisin keinoin.

9. Kerro, miten Eratosthenes mittasi maapallon. Mitä tietoa auringosta tarvittiin? Miten hän sai sen tiedon? (Kirja kertoo tämän!)

10. Todista, että paraabelin kolmesta yhdensuuntaisesta suorasta leikkaamien janojen keskipisteet ovat samalla suoralla, "paraabelin lävistäjällä". Käytä analyyttistä geometriaa, jos et osaa selvittää asiaa kartion avulla tai muulla vanhalla tavalla.

11. Miten ympyrä neliöidään Arkhimedeen spiraalin avulla? Käytä spiraalin tangenttia koskevaa tulosta konstruoidaksesi janat, joiden pituuksien suhde on $\sqrt{\pi}$ ja kuvan kaavaa lopoun hoiteluun.

12. Johda Arkhimedeen tulos, jonka mukaan pallon kalotin ala on sama kuin ympyrän, jonka säteenä on kalotin huipusta pohjan kehälle piirretty jana. Voit tarkistaa tuloksen integroiden.

13. Todista , että taso leikkaa (suoraa ympyrä-) sylinteriä pitkin ellipsiä (tai suoraa tai ei ollenkaan).

14. Laske toruksen tilavuus Pappus- Guldinin säännöllä (johtamatta sitä, ellet itse halua).

Matematiikan historia 2000
Harjoitustehtävävalikoima 30/40 OSA II

Arabian ja Euroopan keskiaika ja renessanssi

15. Suomela teht. 2 s. 28

16. Suomela teht. 8 s. 30

17. Miten kolmannen asteen yhtälön $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kertoimet liittyvät yhtälön juuriin? (Tunnet kai vastaavan tuloksen toisen asteen yhtälölle?) Tämän yhteyden todisti selvästi vasta Girard 1600-luvulla, mutta renessanssin matemaatikot tunsivat ainakin vakiotermin merkityksen.

18. Lue Boyerin tehtävät luvuista "The Arabic Hegemony", "Europe in the Middle Ages" ja "The Renaissance" ja ratkaise niistä yksi mieleisesi.

19. Suomela teht. 4 s. 43

20. Suomela teht. 5 s. 43

Analyysin "keksiminen"

21. Suomela teht. 1 s. 55

22. Suomela teht. 2 s. 55 (riittää tarkasista kolmella mainituista tavoista.)

23. Olkoon

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Määrää sarjakehitelmä funktiolle

a) $f + g$
b) $3f$
c) fg

23 bis (jatkoa edelliselle, mutta lisää pisteitä)

d) $1/f$

24. Laske binomisarjan avulla $(1+x)^{-3/2}$ tarkkuudella ± 0.01, kun $x = \frac{1}{2}$.

25. Suomela teht. 9 s. 79

26. Suomela teht. 4 s. 90

27. Suomela teht. 5 s. 90-91 tai 6 s. 91

28. Suomela teht. 5 tai 6 s. 100

29. 2 seuraavista: Boyer sarja ”THE ARITHMETIZATION OF ANALYSIS” tehtävät 6,7,8,9,10,11,12.

30. toinen seuraavista: Boyer sarja ”Aspects of the Twentieth Century” tehtävät 4 ja 5.

Matematiikan historia 2000
Harjoitustehtävävalikoima 30/40 OSA III

n.1700-luku

31. Suomelan tehtävä 1 sivulta 90 (Sarja 8)

32. Euler aloittaa eksponenttifunktion sarjakehitelmän – erityisesti e:n lukuarvon laskemisen – kehittelyn kirjoittamalla yleisellä kantaluvulla a:

$$a^{\epsilon} = 1 + k\epsilon,$$

missä ϵ on "äärettömän pieni luku" ja sanoo, että k on vain a:sta riippuva vakio. Laske

$$k = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{a^{\epsilon} - 1}{\epsilon}.$$

(Tulos voidaan tietysti tulkita derivaataksi.)

33. Todista de Moivren kaava

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Eulerin tapaan: induktiolla. Mikä on yhteys kompleksiseen eksponenttifunktioon?

34. a) Lausu i^i viiden desimaalin tarkkuudella (useitakin ratkaisuja). b) Lausu i^{i^i} sekä tarkasti että desimaaliapproksimaationa.

35. Boyer "Euler" tehtävä 14: Piirrä käyrä $y = (-1)^x$; Ratkaisuna on ruuviviiva. Mitä saat näin kuutiojuureksi -1:stä? Toisaalta kuutiojuuri -1:stä on -1. Selitä!

36. Boyer "French revolution" tehtävä 8 (Kolmion ala determinanttina. Huomaa determinantin geometrinen tulkinta.)

37. Suomelan tehtävä 11 sivulta 79. Mistä yhteydestä Eulerin gammafunktio muuten on tuttu?

38. Vertaa lukua n pienempien alkulukujen lukumäärää lukuun $\frac{n}{\log n}$, kun $n = 100$ ja suuremmillakin n, nos jaksat tai käytössäsi on tarvittavaa tekniikkaa.

n. 1800-luku

39. Gauss johti nimeään kantavan kellokäyrän eli normaalijakauman lähtemällä vaatimuksesta, että riippumattomien mittaustulosten keskiarvon tulee olla todennäköisin mittaustulos. Osoita, että normaalijakaumalla on tämä ominaisuus, ts. seurava asia: $n-$kokoisen otoksen tiheysfunktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i),$$

missä

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

suurin arvo joukossa $\left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu\right\}$ saavutetaan kohdassa $x_1 = x_2 = \ldots x_n = \mu$. (Käytä esim. Lagrangen kertoimia.)

40. Todista, että luvut 1,2,3,.....,999 voidaan järjestää mihin tahansa järjestykseen vaihtamalla vaiheittain kerrallaan jonon 2 lukua keskenään, jopa vain aina 2 vierekkäistä. Tarvittavien vaihtojen lukumäärä n riippuu vaihtojärjestyksestä, mutta $(-1)^n$ ei riipu. Mistä tämä johtuu?

41. Määrää suppein $\mathbb{C}$:n alikunta, johon kuuluvat

a) kaikki rationaaliluvut

b) kaikki rationaaliluvut ja $\sqrt{2}$

c) kaikki reaaliluvut ja i.

42. Todista Cauchyn lause, jonka mukaan äärellisen kommutatiivisen ryhmän G aliryhmän H alkioiden lukumäärä on koko ryhmän alkioiden lukumäärän tekijä. Vihje: ryhmä jakautuu yhtä suuriin ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssissa $a \sim b \iff a-b \in H$.

43. Yritä todistaa suoraan, että analyyttisten funktioiden summa, tulo ja yhdistetty kuvaus ovat analyyttisiä funktioita (Weierstrassin mielessä; anal. funktio on potenssisarjan summa.). Miten asia todistetaan helpommin?

44. Todista reaalilukujen perusominaisuudet lähtemällä Dedekindin leikkauksista (Tämä tehtävä on hyvin laaja, eikä sitä tarvitse käsitellä kokonaan. Pisteitä 1-4 laskettujen vaiheiden määrän mukaan. Täydellisyys on mielenkiintoisin kohta!).