Matematiikan historia 2001
Harjoitus 6
Demoaika **ke 24.10.2001** KLO. 8.30-10.00 **MaD 380**

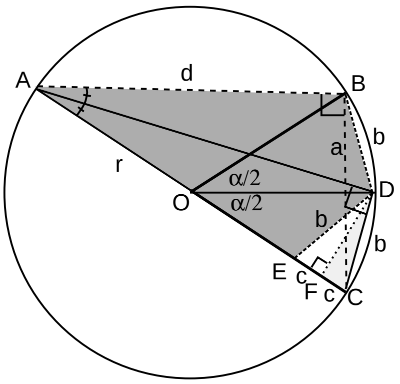
1. Tee jännetaulukko Hipparkhoksen kaavaa käyttämällä ja Hipparkhoksen yksiköin, toisin sanoen valiten pallon säteeksi ykkösen sijasta 60. Huomaa siis aluksi, että on valittu mitakaavaksi crd(60°)=R=60. Käytä sitten puolen kulman jänteen kaavaa

$$\mathrm{crd}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{R(2R - \mathrm{crd}(180 - \alpha))}$$

ja sen kaverina Pythagoraan lausetta muodossa $\mathrm{crd}(180 - \alpha) = \sqrt{(2R)^2 - \mathrm{crd}^2(\alpha)}$. Neliöjuuret saat katsoa laskimesta. Osaatko ohjelmoida koneen tekemään näitä hommia?

2. Todista ainakin 2 em. kaavoista.

Puolen kulman jänne



r=60=A0
a=BC=crd α
b=BD=ED=DC=crd α/2
c=EF=CF=(AC-AE)/2=(2r-d)/ 2
d=AE=AB=crd(180-α)

Kolmiot ACD ja DCF ovat yhdenmuotoiset,
joten AC : DC = CD : CF, eli
2r : b = b : c
2r : crd α/2 = crd α/2 : (2r-d)/2

3. Selitä, miksi ekliptikan ja päiväntasaajan välinen kulma voidaan mitata mittamalla Jyväskylässä auringon korkeus (= kulma horisontista auringon alareunaan) keskipäivällä juhannuksena ja jouluna. Mitä pitää laskea?

4. Päättele itse, mihin kellonaikaan paikallista aikaa aurinko nousee Helsingissä (60 astetta pohjoista leveyttä) sellaisena päivänä, jona aurinko on keskipäivällä 30 astetta horisontin yläpuolella (Oleta aurinko pisteeksi.)

5. Boyer: "Revival and decline of greek mathematics" No. 4 ja toinenkin samasta sarjasta.

6. Määrää kartioleikkauksia käyttäen yhtälön $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$ positiiviset juuret.

(Homogeeniseen asuun $x^3 + x\sqrt{2}^2 + 2^3 = 5x^2$ kirjoitettuna yhtälö voidaan lukea tilavuuksia koskevana yhtäsuuruutena ja tehtävä kuuluu: kun on annettu mittayksikkö ja sen suhteen $\sqrt{2}$, 2, ja 5 pituiset janat, määrää harppia ja viivoitinta käyttäen sellaisen kuution särmä, jolle... Tässä geometrisessa muodossa tehtävä kuuluu Omar Khaijamin hallitsemaan tyyppiin.)

7. Luvut 220 ja 284 ovat *ystävykset*, kumpikin on toisen alkutekijöiden summa. Tarkasta asia, jonka tiesivät myöhäisajan helleenitkin. He eivät löytäneet muita ystäväpareja, mutta Thābit ibn Qurra keksi n. vuonna 800 seuraavan lauseen. Kaikilla $n > 1$ merkitään $p_n = 3 \cdot 2^n - 1$ ja $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$. Jos luvut p_{n-1}, p_n ja q_n ovat alkulukuja, niin luvut $a = 2^n p_{n-1} p_n$ ja $b = 2^n q_n$ ovat ystävykset. Tapauksessa $n = 2$ näin käy, ja saadaan em. tunnettu lukupari. Seuraava pari, 17296 ja 18416, keksittiin kuitenkin vasta 500 vuotta myöhemmin (Kamāl al-Dīn al-Fārisi).