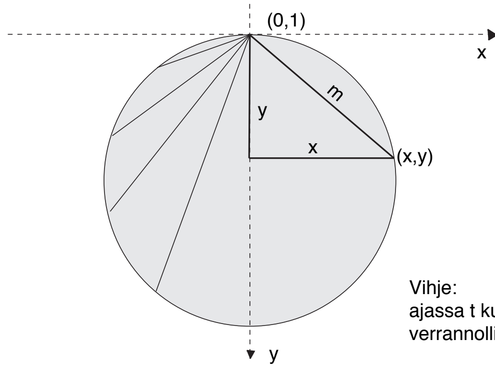
JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Matemaatiikan historia **Harjoitus 6 / 2011**

1. Osoita oikeaksi Bombellin väite, että $4 + \sqrt{-1}$ on luvun $52 + \sqrt{-2209}$ kuutiojuuri. (Mikä mies olikaan Bombelli?)

2. (Galilei) Onton pallon huipusta pudotetaan massapiste suoraa viivaa pitkin kitkatta. Aika, joka kuluu kunnes se törmää seinään, ei riipu suunnasta! Perustele?



Vihje:
ajassa t kuljettu matka m on
verrannollinen loppunopeuteen.

3. Napier käytti N-logaritmitaulujensa laatimiseen 20 vuotta. Tulos oli hyvä, virheitä vähän. Kun hän oli valmis, hän huomasi, että nykyaikaisen tyyppinen 10-kantainen taulukko olisi kätevämpi. Sellaista hän ei eläessään saanut valmiiksi, mutta jutteli asiasta Briggsin kanssa, joka teki työn. Briggs ei muuntanut Napierin taulukoita vaan laski kokonaan uudet. Briggsin logaritmitaulut olivat käytössä tietokoneiden kehittymiseen asti.

a) Laske logaritmitaulukon avulla tulo $4567 \cdot 45678$.

Itse asiassa Napier ei edes mainitse, miten lasketaan tulon logaritmi. Koska tähtitieteen laskuissa tarvittiin pelkkää trigonometriaa, laaditiin alun perin logaritmitaulukoiden ja trigonometristen taulukoiden yhdistelmiä. Tällainen

$$34°40' \quad 5688011 \quad 5642242 \quad 3687872 \quad 1954370 \quad 8224751 \quad 55°20'$$

1. sarakkeella on kulma α, toisella sen sini, viimeinen sarake on $90° - \alpha$ ja edellinen sen sini eli $\cos\alpha$. Kolmas ja viides sarake ovat (Napier-)logaritmit näistä sineistä. Keskimmäinen sarake on naapuriensa erotus, siis Nlog $\tan\alpha$.

b) Laadi vastaava rivi luonnollisin logaritmein tai 10-kantaisin.

c) Olkoon kolmiosta annettu kaksi kulmaa α ja β sekä α:n vastainen sivu a. Selitä, miten lasketaan (nykyaikaistetun) Napierin taulukon avulla sivu b. (Sinilause!)

d) Entäpä miten lasketaan β, jos on annettu kaksi sivua a ja b ja niiden välinen kulma γ?

Vihje: Huomaa, että tiedät summan $\alpha + \beta$. Nyt kannataa käyttää apuna kaavaa (jota ei tarvitse todistaa)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

4. Suomelan t. 5.2 sivu 55: Määrää ellipsin $3x^2 + 4y^2 = 48$ tangentti pisteessä $(2, 3)$

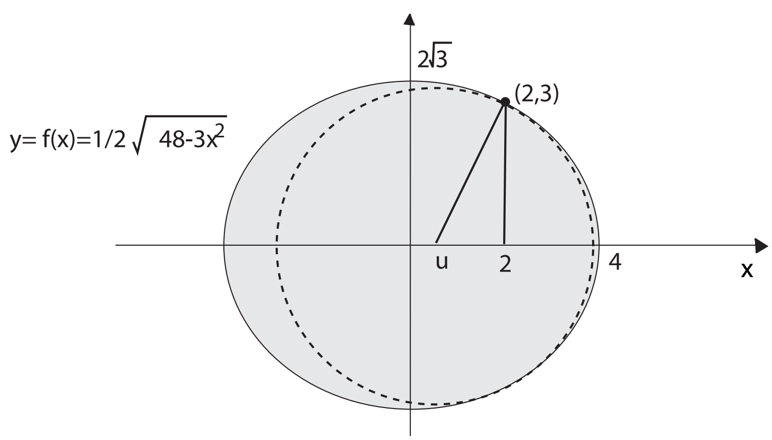
a) Robervalin kinemattisella menetelmällä (periaate on, että ellipsillä liikkuva piste etääntyy toisesta polttopisteestä samalla nopeudella kuin lähestyy toista, onhan ellipsi niiden pisteiden ura, joiden etäisyyksien summa polttopisteistä on vakio.)

b) Fermat'n menetelmällä (pseudoyhtälö, Suomela sivu 49).

5. (Jatkoa)

c) Niin kuin parhaiten osaat. (On monta vaihtoehtoa, esim. implisiittinen derivointi!)

d) Descartesin menetelmällä (Suomela s. 50: Etsi sellainen ympyrä, jonka keskipiste on x-akselilla ja joka sivuaa ellipsiä pisteessä $(2, 3)$. Tässä on 2 tuntematonta, ympyrän säde r ja sen keskipisteen x-koordinaatti u. Koska ellipsi



on kokonaan sivuavan ympyrän samalla (ulko-) puolella, niin välillä $[0, 4]$, on $(f(x))^2 + (u - x)^2 \geq r^2$. Toisen asteen yhtälöllä $(f(x))^2 + (u - x)^2 - r^2 = 0$ on siis kohdassa x=2 arvo 0 ja diskriminantti 0. Tässä kaksi yhtälöä kahdelle tuntemattomalle u ja r. Tietenkin $f(2) = 3$.

6. Olkoon $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
Määrää sarjakehitelmä(n alkua) funktiolle

(1) $f + g$ (helppo)
(2) $3f$ (helppo)
(3) fg (vertaa polynomeihin!)
(4) $1/f$ (, jos osaat. Etsitty sarja kerrottuna f:n sarjalla antaa pelkän ykkösen!)

7. Laske binomisarjan avulla $(1 + x)^{-3/2}$ tarkkuudella ± 0.01, kun $x = \frac{1}{2}$.