JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

**Matemaatiikan historia** **Harjoitus 5 / 2010**

**1.** Suorita kertolasku 124 kertaa 21 (tai 372 kertaa 82 ) kiinalaisella helmitaululla (Suan-Pan). Piirrä välivaiheet sarjakuvana. Helmitaulun käyttöhjeet jaetaan demolaatikkoon ja ovat myös Kahanpään kotisivulla.

**2.** Määrää kiinalaisella algoritmilla eli Hornerin menetelmällä sadasosan tarkkuudella yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ juuri, joka on 1:n ja 2.n välillä.

**3.** Brahmaguptan ratkaisussa Pellin yhtälölle $Dx^2+1 = y^2$ ($D = 92$) määrittelee "kolmikon" luvuiksi $(x, y, b)$, joilla $Dx^2 + b = y^2$. Todista, että jos $(x_0, y_0, b_0)$ ja $(x_1, y_1, b_1)$ ovat kolmikkoja, niin myös niiden yhdistelmä $(x_0y_1 + x_1y_0, Dx_0x_1 + y_0y_1, b_0b_1)$ on kolmikko.

**4.** Lue Boyerin tehtävät luvuista "China and India" ja "The Arabic Hegemony" ja ratkaise niistä mieleisesi.

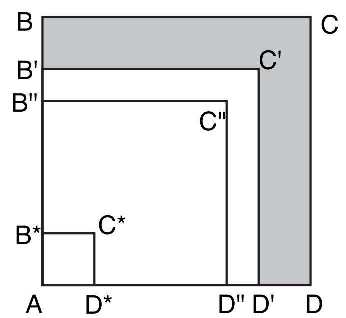
**5.** Luvut 220 ja 284 ovat *ystävykset*, kumpikin on toisen tekijöiden summa (1 mukana, koko luku ei). Tarkasta tämä asia, jonka tiesivät myöhäisajan helleenitkin. He eivät löytäneet muita ystäväpareja, mutta Thābit ibn Qurra keksi n. vuonna 850 seuraavan lauseen. Kaikilla $n > 1$ merkitään $p_n = 3\cdot 2^n-1$ ja $q_n = 9\cdot 2^{2n-1}-1$. Jos luvut $p_{n-1}, p_n$ ja $q_n$ ovat alkulukuja, niin luvut $a = 2^np_{n-1}p_n$ ja $b = 2^nq_n$ ovat ystävykset. Tarkasta, että tapauksessa $n = 2$ näin käy, ja saadaan em. tunnettu lukupari. Seuraava pari, 17296 ja 18416, keksittiin kuitenkin vasta 500 vuotta myöhemmin (Kam̄al al-Dīn al-Fārisi).

This formula gives the amicable pairs (220, 284), (17296, 18416) and (9363584, 9437056). The pair (6232, 6368) are amicable, but they cannot be derived from this formula. In fact, this formula produces amicable numbers for n = 2, 4, and 7, but for no other values below 20000. Also, a pair of coprime amicable numbers cannot be generated by Thabit's formula (above), nor by any similar formula. Thabit's formula was rediscovered by Descartes and generalized by Euler. The pair (9363584; 9437056) has often been attributed to Descartes, but it was actually first discovered by Muhammad Baqir Yazdi in Iran.[1] The first few amicable pairs are: (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368). http://www.shyamsundergupta.com/amicable.htm

**6.** Al Khwarizmin *al-jabr* -kirjassa, josta algebran sanotaan alkavan, on seuraava tehtävä: Olen jakanut luvun 10 kahteen osaan, ja olen jakanut ensimmäisen toisella ja toisen ensimmäisellä ja osamäärien summa on $2\frac{1}{6}$. Etsi luvut!

**7.** Matemaatikko Al-Kashi ja Samarkandin ruhtinas Ulugh Beg laativat 1400-luvun alussa — läntisemmän islamilaisen luonnontieteen jo ohitettua kukoistuksensa huipun — taulukon, jossa kulman sini ja tangentti ilmoitettiin kulmaminuutin välein viiden seksagesimaalin tarkkuudella. Kuinka monta lukua siis laskettiin? Mikä tämä tarkkuus on desimaaleina? Osaatko arvioida, onko järkevää käyttää tätä kulmatiheyttä yhdessä tämän desimaalimäärän kanssa? Lähtökohtana muille laskuille he käyttivät likiarvoa $\sin 1^\circ = 0,017452406437283571$, jonka Al-Kashi oli johtanut puolen kulman ja kolmasosakulman (!) kaavoilla. Onko tämä likiarvo oikein? (Vai onko ehkä joku kopioinut väärin?)

**8.** Abu Bakr al Karaji ( –1019) käytti matemaattista induktiota todistaakseen, että $1^3+2^3+\ldots n^3=(1+2+\cdots+n)^2$. Itse asiassa hän todistaa väitteen ainoastaan, kun $n=10$, mutta todistus ja väite yleistyvät., Tarkasta päättelyn yleistyvyys ja tunnista induktiovaihe. Päättely on seuraava:




Tarkastellaan neliötä $\square ABCD$, jonka sivun pituus on $1+2+\cdots+10$. Kuviossa $BB'=CC'=10$. Kulma-alueen *("gnomon")* $BCDD'C'B'$ ala on

$$2\cdot 10(1+2+\cdots+9)+10^2=2\cdot 10\cdot\frac{9\cdot 10}{2}+10^2=9\cdot 10^2+10^2=10^3.$$

Koko neliön ala on summa tästä ja neliön $\square AB'C'D'$ alasta:

$$(1+2+\cdots+10)^2=(1+2+\cdots+9)^2+10^3.$$

Vastaavalla tavalla lasketaan

$$(1+2+\cdots+9)^2=(1+2+\cdots+8)^2+9^3.$$

Lopuksi jäävän neliön $\square AB*C*D*$ ala on 1. Yhdistämällä tulokset saadaan väite.

**Lisätieto** Irakilaisen setelin kuva eisttää Alhazenia, oikealta nimeltään Abu Ali al-hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham (965-1039), yhtä arabimaailman kaikien aikojen suurimmista tiedemiehistä. Alhazen todisti em. kaavan kaikille $n$ ja yleisti sen myös neljänsille potensseille käyttäen menetelmää, joka yleistyy summalle $\sum_{i=1}^{n} n^i$.