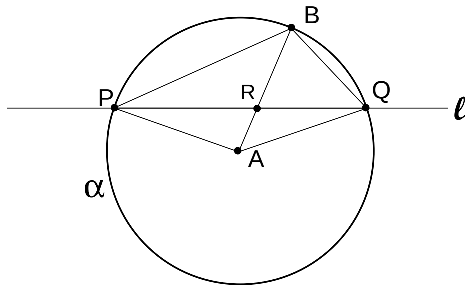


Kuva 139: Kehäkulmalause tapauksessa $A\ell B$

Todistus. Käsittelemme ensin tapauksen b) eli $A\ell B$, jolloin jana AB leikkaa ℓ:ää. Olkoon leikkauspiste R. Tällöin R on α:n sisällä ja siten lauseen 2.6.6 nojalla on oltava $P * R * Q$. Koska myös $A * R * B$, niin lauseen 2.5.15 mukaan

$$(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ + (\measuredangle ABQ)^\circ.$$

Lauseen 2.4.1 mukaan $(\measuredangle PQA)^\circ = (\measuredangle QPA)^\circ$, $(\measuredangle BPA)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ$ ja $(\measuredangle BQA)^\circ = (\measuredangle ABQ)^\circ$, jolloin 2.5.15:n mukaan $(\measuredangle QPB)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ - (\measuredangle QPA)^\circ$ ja $(\measuredangle PQB)^\circ = (\measuredangle BQA)^\circ - (\measuredangle QPA)^\circ$. Kolmion $\triangle PQB$ kulmien astelukujen summa on 180, joten

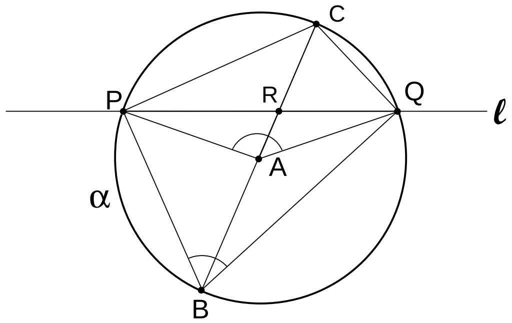
$$((\measuredangle PBA)^\circ - (\measuredangle PQA)^\circ) + \big((\measuredangle BQA)^\circ - (\measuredangle PQA)^\circ\big) + \big((\measuredangle BQA)^\circ - (\measuredangle QPA)^\circ\big) = 180,$$

josta saadaan

$$(*) \qquad (\measuredangle BPA)^\circ + (\measuredangle BQA)^\circ = 90 + (\measuredangle PQA)^\circ.$$

Toisaalta myös kolmion $\triangle PQA$ astemittojen summa on 180, joten $(\measuredangle PAQ)^\circ + 2(\measuredangle PQA)^\circ = 180$, eli $(\measuredangle PQA)^\circ = 90 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Sijoittamalla tämä kaavaan $(*)$ saadaan $(\measuredangle PBA)^\circ + (\measuredangle ABQ)^\circ = 90 + (90 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ) = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Tapauksessa b) väite siis pätee.

Tapaus a) on hieman mutkikkaampi. Oletuksen $AB\ell$ voimassa ollessa on nimittäin kolme mahdollisuutta: i) A on kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä, ii) sen kyljellä tai iii) sen ulkopuolella. Käsittelemme tapaukset erikseen.

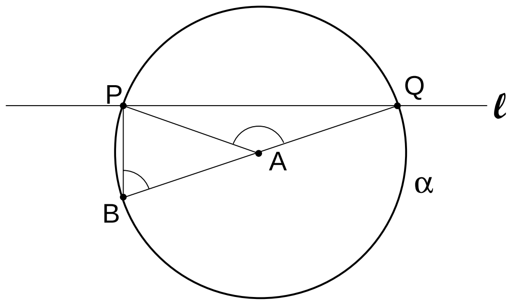


Kuva 140: Kehäkulmalause; $AB\ell$ ja A kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä

Tapauksessa i) eli kun A on kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä, valitaan piste C siten, että $C * A * B$ ja $CA \cong AB$, jolloin $C \in \alpha$. Koska A on kulman $\measuredangle PBQ$ sisällä, puolisuora $\overrightarrow{AC}$ eli $\overrightarrow{AB}$ leikkaa janaa PQ. Olkoon leikkauspiste R. Koska R on ympyrän α sisällä, on $B * R * C$. Toisaalta $AB\ell$, joten ei voi olla $B * R * A$, jolloin on oltava $B * A * R$ ja siten $A * R * C$. Näin $A\ell C$ ja voidaan soveltaa edellä todistettua b) -kohtaa, jonka mukaan $(\measuredangle PCQ)^\circ = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Koska $\overleftrightarrow{BC}$ kulkee A:n kautta, ovat kulmat $\measuredangle CPB$ ja $\measuredangle CQB$ lauseen 3.1.20 perusteella suoria, joten $(\measuredangle CPB)^\circ = (\measuredangle CQB)^\circ = 90$. Kolmioiden $\triangle PCB$ ja $\triangle PQB$ astemittojen summa on kumpikin 180, joten saadaan $(\measuredangle PCB)^\circ + (\measuredangle PBC)^\circ = 90$ ja $(\measuredangle QCB)^\circ + (\measuredangle QBC)^\circ = 90$. Koska $P * R * Q$, niin $(\measuredangle PCB)^\circ + (\measuredangle BCQ)^\circ = (\measuredangle PCQ)^\circ$ ja $(\measuredangle PBC)^\circ + (\measuredangle CBQ)^\circ = (\measuredangle PBQ)^\circ$. Näistä yhdistämällä saadaan

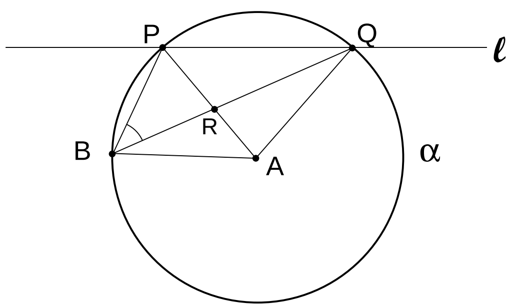
$$\begin{aligned}(\measuredangle PBQ)^\circ &= (\measuredangle PBC)^\circ + (\measuredangle CBQ)^\circ = 90 - (\measuredangle PCB)^\circ + 90 - (\measuredangle QCB)^\circ \\ &= 180 - (\measuredangle PCQ)^\circ = 180 - (180 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ) = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ\end{aligned}$$

kuten pitääkin.



KUVA 141: KEHÄKULMALAUSE; $AB\ell$ JA A KULMAN $\measuredangle PBQ$ KYLJELLÄ

Tapauksessa ii), jossa A on kulman $\measuredangle PBQ$ kyljellä, voidaan merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla ($P \leftrightarrow Q$) olettaa, että A on kyljellä $\overrightarrow{BQ}$, jolloin on oltava $B * A * Q$. Lauseen 2.4.1 nojalla $(\measuredangle BPA)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ$ ja $(\measuredangle AQP)^\circ = (\measuredangle APQ)^\circ$. Koska $B * A * Q$, niin $(\measuredangle BPQ)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ + (\measuredangle APQ)^\circ$. Toisaalta Thaleen lauseen 3.1.20 nojalla $\measuredangle BPQ$ on suora, joten $(\measuredangle BPA)^\circ + (\measuredangle APQ)^\circ = 90$. Koska kolmion $\triangle APQ$ astemittojen summa on 180, niin $(\measuredangle PAQ)^\circ = 180 - 2(\measuredangle APQ)^\circ$ ja siis $(\measuredangle APQ)^\circ = 90 - \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$. Näin ollen $(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle PBA)^\circ = 90 - (\measuredangle AQP)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ$ tässäkin tapauksessa.



KUVA 142: KEHÄKULMALAUSE; $AB\ell$ JA A KULMAN $\measuredangle PBQ$ ULKOPUOLELLA

Tapauksessa iii), jossa A on kulman $\measuredangle PBQ$ ulkopuolella, on joko $\overleftrightarrow{ABQP}$ tai $\overleftrightarrow{ABPQ}$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $\overleftrightarrow{ABQP}$, jolloin suora $\overleftrightarrow{BQ}$ leikkaa janaa AP pistessä R, joka on ympyrän α sisäpuolella ja silloin on oltava $B * R * Q$. Lauseen 2.4.1 mukaan $(\measuredangle PBA)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ$ ja $(\measuredangle QBA)^\circ = (\measuredangle BQA)^\circ$. Koska $B*R*Q$ ja $A*R*P$, niin $(\measuredangle PBQ)^\circ = (\measuredangle PBR)^\circ = (\measuredangle BPA)^\circ - (\measuredangle BQA)^\circ$. Kolmiosta $\triangle ABQ$ saadaan $(\measuredangle BAQ)^\circ + 2(\measuredangle BQA)^\circ = 180$ ja kolmiosta $\triangle ABP$ saadaan $(\measuredangle BAP)^\circ + 2(\measuredangle BPA)^\circ = 180$. Koska $B * R * Q$ niin $(\measuredangle BAQ)^\circ = (\measuredangle BAP)^\circ + (\measuredangle PAQ)^\circ$. Näistä yhtälöistä saadaan

$$\begin{aligned}(\measuredangle PBQ)^\circ &= (\measuredangle BPA)^\circ - (\measuredangle BQA)^\circ = \frac{1}{2}(180 - (\measuredangle BAP)^\circ) - \frac{1}{2}(180 - (\measuredangle BAQ)^\circ) \\ &= \frac{1}{2}((\measuredangle BAQ)^\circ - (\measuredangle BAP)^\circ) = \frac{1}{2}(\measuredangle PAQ)^\circ.\end{aligned}$$

□

Sinilauseen 3.1.14. nojalla nähdään, että kolmion sivun pituuden suhde vastakkaisen kulman siniin on kaikissa kolmessa kulmassa sama:

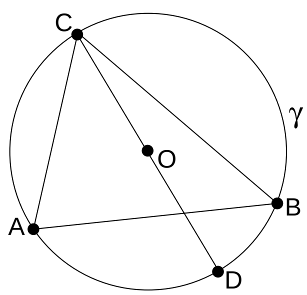
$$\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle A} = \frac{\overline{CA}}{\sin\measuredangle B} = \frac{\overline{AB}}{\sin\measuredangle C}.$$

Tämä vakio on läheisessä yhteydessä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säteeseen. Pätee näet:

LAUSE 3.1.22. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja r sen ympäri piirretyn ympyrän säde. Tällöin*

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle A} = 2r.$$

Todistus. Olkoon O kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän γ keskipiste. Valitaan D siten, että $D * O * C$ ja $\overline{DO} = r$, jolloin $D \in \gamma$ ja $D \neq C$.

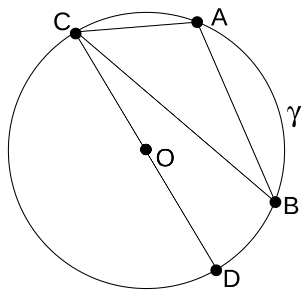


Kuva 143: Ympäri piirretyn ympyrän säde, tapaus $\overleftrightarrow{ADBC}$

Jos nyt $D = B$, niin Thaleen lauseen 3.1.20 nojalla $\measuredangle A$ on suora ja siten $\sin\measuredangle A = 1$. Toisaalta $\overline{BC} = \overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OC} = 2r$ ja siten väite pätee. Voidaan siis olettaa, että $D \neq B$, joten joko $\overleftrightarrow{ADBC}$ (kuten kuvassa) tai sitten $\overleftrightarrow{ABCD}$. Kummassakin tapauksessa $\overleftrightarrow{ODBC}$, joten kehäkulmalauseen 3.1.21 a) -kohdan mukaan

$$(*) \qquad (\measuredangle BDC)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ.$$

Tapauksessa $AD\overleftrightarrow{BC}$ on myös $AO\overleftrightarrow{BC}$, joten taas lauseen 3.1.21 a) mukaan $(\measuredangle A)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ = (\measuredangle BDC)^\circ$ ja siten $\measuredangle A \cong \measuredangle BDC$ ja erityisesti $\sin \measuredangle A = \sin \measuredangle BDC$. Tapauksessa $\overleftrightarrow{AB}CD$ on $\overleftrightarrow{AB}CO$, joten kehäkulmalauseen 3.1.21 b) -kohdan mukaaan $(\measuredangle A)^\circ = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ \overset{(*)}{=} 180 - (\measuredangle BDC)^\circ$. Sinin määritelmän mukaan siis $\sin \measuredangle A = \sin \measuredangle BDC$.



Kuva 144: Ympäri piirretyn ympyrän säde, tapaus $\overleftrightarrow{AB}CD$

Molemmissa tapauksissa on siis $\sin \measuredangle A = \sin \measuredangle BDC$. Nyt DC on γ:n halkaisija, joten Thaleen lauseen 3.1.20 mukaan kulma $\measuredangle DBC$ on suora ja siten

$$\sin \measuredangle BDC = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

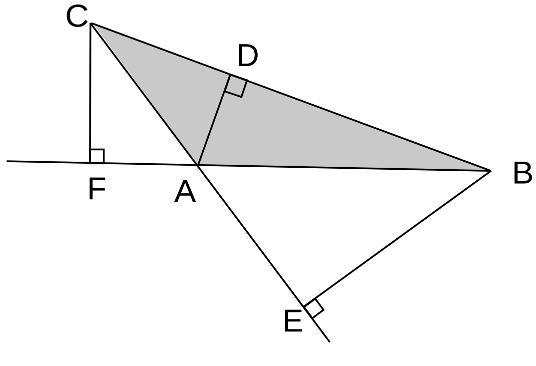
ja edelleen

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \measuredangle A} = \frac{\overline{BC}}{\sin \measuredangle BDC} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}/\,\overline{DC}} = \overline{DC} = \overline{DB} + \overline{OC} = 2r.$$

□

Kolmion ala.

Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Olkoon D pisteen A kautta kulkevan $\overleftrightarrow{BC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{BC}$:n leikkauspiste Jana AD on kolmion $\triangle ABC$ *korkeusjana*. Vastaavasti määritellään korkeusjanat BE ja CF (ks. kuva).



Kuva 145: Korkeusjanat

Kolmion $\triangle ABC$ *pinta-ala*, jota merkitään ala(ABC), määritellään asettamalla

$$\text{ala}(ABC) = \tfrac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AD}.$$

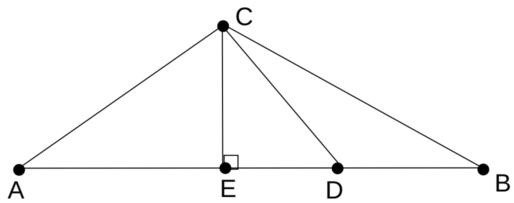
Huom. Ala on siis asettamamme määritelmän mukaan ”puoli kertaa kanta kertaa korkeus”. On tarkastettava, että määritelmä ei riipu siitä, mikä sivu on valittu ”kannaksi”, ts. tulee olla

$$(*) \qquad \tfrac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AD} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{CF} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{BE}.$$

Tämä nähdään seuraavasti: Jos $B \neq D$, niin $\triangle ADB$ on kolmio, vieläpä suorakulmainen, ja $\sin\measuredangle B = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ joten $\overline{AD} = \overline{AB}\sin\measuredangle B$. Jos myös $B \neq F$, niin $\sin\measuredangle B = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}$ eli $\overline{CF} = \overline{BC}\sin\measuredangle B$. Siten $\frac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{AB}\sin\measuredangle B = \frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{CF}$. Jos $B = D$ tai $B = F$, niin $B = D = F$ ja väite seuraa suoraan. Vastaavasti todistetaan $(*)$:n jälkimmäinen yhtälö.

Huom. Kolmion pinta-alalla on myös seuraava tarkoitusperiämme varten oleellinen additiivisuusominaisuus: Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja $A * D * B$, niin

$$\text{ala}(ABC) = \text{ala}(ADC) + \text{ala}(DBC).$$



Kuva 146: Alan additiivisuus

Tämä seuraa suoraan alan määritelmästä, sillä kaikilla kolmioilla on tässä yhteinen korkeusjana CE.

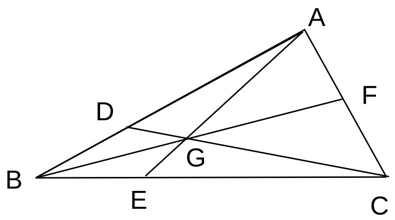
Cevan lause.

Giovanni Ceva[18] todisti vuonna 1678 seuraavan hyvin käyttökelpoisen lauseen:

LAUSE 3.1.23 (Ceva). *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A * D * B$, $B * E * C$ ja $C * F * A$. Jos janat AE, BF ja CD kulkevat saman pisteen kautta, niin*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1.$$

[18] Giovanni Ceva 1647–1734. Italia



KUVA 147: CEVAN LAUSE

Todistus. Olkoon G janojen yhteinen leikkauspiste. Koska $B*E*C$ ja G on janalla AE, niin G on kulman $\measuredangle CAB = \measuredangle CAD$ sisällä ja siten $C * G * D$. Kolmion pinta-alan additiivisuuden nojalla $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + \text{ala}(AGC)$ eli

$$(*) \qquad \text{ala}(AGC) = \text{ala}(ADC) - \text{ala}(ADG).$$

Vastaavasti

$$(**) \qquad \text{ala}(CGB) = \text{ala}(BDC) - \text{ala}(BDG).$$

Kolmioilla $\triangle ADC$ ja $\triangle BDC$ on sama $\overleftrightarrow{AB}$:n vastainen korkeusjana, olkoon sen pituus h. Tällöin

$$(***) \qquad \frac{\text{ala}(ADC)}{\text{ala}(BDC)} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot h}{\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot h} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \text{ ja vastaavasti}$$

$$(****) \qquad \frac{\text{ala}(ADG)}{\text{ala}(BDG)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

Yksinkertainen lasku osoittaa, että jos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = x$, niin myös $\frac{a-c}{b-d} = x$. Siis kaavojen $(*)$ - $(****)$ nojalla

$$\frac{\text{ala}(AGC)}{\text{ala}(CGB)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Vastaava päättely osoittaa, että

$$\frac{\text{ala}(CGB)}{\text{ala}(BGA)} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$$

ja

$$\frac{\text{ala}(BGA)}{\text{ala}(AGC)} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

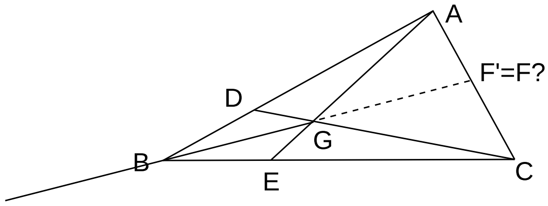
Siten

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\text{ala}(AGC)}{\text{ala}(CGB)} \cdot \frac{\text{ala}(CGB)}{\text{ala}(BGA)} \cdot \frac{\text{ala}(BGA)}{\text{ala}(AGC)} = 1.$$

□

Cevan lauseelle pätee myös käänteinen tulos:

LAUSE 3.1.24. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $A * D * B$, $B * E * C$ ja $C * F * A$. Jos $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = 1$, niin kaikki kolme janaa AE, BF ja CD kulkevat saman pisteen kautta.*

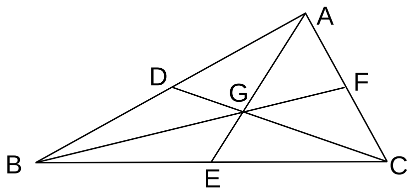


Kuva 148: Cevan lauseen kääntäminen

Todistus. Puomilauseen 2.3.11 nojalla $\overrightarrow{AE}$ leikkaa janaa CD. Olkoon leikkauspiste G, jolloin siis $C * G * D$. Koska $GD\overleftrightarrow{BC}$ ja $AD\overleftrightarrow{BC}$ niin $AG\overleftrightarrow{BC}$ jolloin on oltava $A * G * E$ eli G on myös janalla AE. Puomilauseen nojalla $\overrightarrow{BG}$ leikkaa janaa AC. Olkoon leikkauspiste F'. Koska $EB\overleftrightarrow{AC}$ ja ja $EG\overleftrightarrow{AC}$, niin $BG\overleftrightarrow{AC}$ ja siten G on janalla BF'. Nyt Cevan lause soveltuu ja saadaan $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF'}}{\overline{AF'}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = 1$. Käyttäen oletusta $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = 1$ saadaan tästä $\frac{\overline{CF'}}{\overline{AF'}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$ eli $\frac{\overline{CF'}}{\overline{CA}-\overline{CF'}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CA}-\overline{CF}}$, josta edelleen $\overline{CA} \cdot \overline{CF'} = \overline{CA} \cdot \overline{CF}$ eli $\overline{CF'} = \overline{CF}$. Koska F ja F' ovat janalla CA, niin välttämättä tällöin $F = F'$. Koska G on janalla BF', niin se on siis janalla BF ja siten Gon tutkittavien kolmen janan leikkauspiste. □

Esimerkiksi kolmion *keskijanat* s.o. sivujen keskipisteitä ja vastakkaisia kärkiä yhdistävät janat leikkaavat toisensa Cevan lauseen mukaan samassa pisteessä, kolmion *painopisteessä.*

LAUSE 3.1.25. *Kolmion keskijanat jakavat kolmion kuuteen pienempään kolmioon, joilla kaikilla on sama pinta-ala.*
Todistus.



Kuva 149: Keskijanat

Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, D sivun AB, E sivun BC ja F sivun CA keskipiste sekä G keskijanojen AE, BF ja CD yhteinen leikkauspiste, joka Cevan lauseen mukaan on olemassa. Väite on siis, että

$$\text{ala}(ADG) = \text{ala}(BDG) = \text{ala}(BEG) = \text{ala}(CEG) = \text{ala}(CFG) = \text{ala}(AFG).$$

Kolmioissa $\triangle ADG$ ja $\triangle BDG$ on sama korkeusjana ja $\overline{AD} = \overline{BD}$, joten $\text{ala}(ADG) = \text{ala}(BDG)$. Vastaavasti $\text{ala}(AFG) = \text{ala}(CFG)$ ja $\text{ala}(CEG) = \text{ala}(BEG)$ ja lisäksi $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(BDC)$ sekä $\text{ala}(ACE) = \text{ala}(ABE)$ ja $\text{ala}(ABF) = \text{ala}(CBF)$. Koska, kuten 3.1.24:n todistuksessa nähtiin, $C * G * D$, niin pinta-alan additiivisuuslauseen nojalla $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + \text{ala}(AGC)$. Samoin $A * F * C$ ja siis $\text{ala}(AGC) = \text{ala}(AGF) + \text{ala}(GFC)$. Siten $\text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + \text{ala}(AGF) + \text{ala}(GFC)$. Mutta, kuten todettiin, $\text{ala}(AGF) = \text{ala}(GFC)$, joten

$$(*) \qquad \text{ala}(ADC) = \text{ala}(ADG) + 2 \cdot \text{ala}(AGF).$$

Vastaavasti nähdään, että

$$(**) \qquad \text{ala}(BDC) = \text{ala}(BDG) + 2 \cdot \text{ala}(CEG).$$

Tiedetään, että ala(ADC) = ala(BDC), joten yhtälöistä $(*)$ ja $(**)$ saadaan

$$\text{ala}(ADG) + 2 \cdot \text{ala}(AGF) = \text{ala}(BDG) + 2 \cdot \text{ala}(CEG).$$

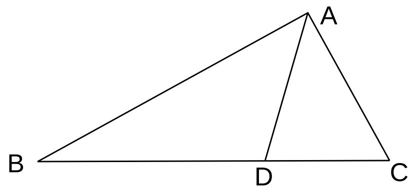
Nyt käytetään tietoa ala(ADG) = ala(BDG) ja saadaan ala(AGF) = ala(CEG). Vastaavasti voidaan näyttää, että ala(BDG) = ala(CEG) ja väite seuraa. □

LAUSE 3.1.26. *Kolmion keskijanat jakavat toisensa suhteessa 2:1, ts., jos A, B, C, D, E, F ja G ovat kuten lauseessa 3.1.24, niin $\overline{AG} = 2\overline{GE}$.*

Todistus. Lauseen 3.1.25 mukaan ala$(ACG) = 2 \cdot$ ala(CEG). Näillä kolmioilla on yhteinen korkeusjana (kärjestä C, pituus h), joten $\frac{1}{2}\overline{AG} \cdot h = \frac{1}{2}\overline{EG} \cdot h$. Tästä väite seuraa. □

LAUSE 3.1.27. *Kolmion kulman puolittaja jakaa sen vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, ts., jos $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * A$, ja $\overrightarrow{AD}$ on $\measuredangle A$:n puolittaja, niin*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$



Kuva 150: Kulman puolittaja

Todistus. Sinin määritelmän mukaan $\sin\measuredangle CDA = \sin\measuredangle BDA$. Sinilauseen nojalla

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle CDA}$$

ja

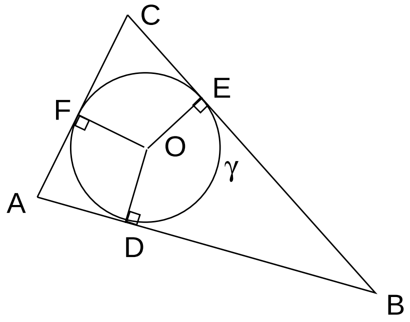
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\sin\measuredangle DAB}{\sin\measuredangle BDA}.$$

Kulman puolittajan määritelmän nojalla $\sin\measuredangle CAD = \sin\measuredangle DAB$, joten

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \frac{\sin\measuredangle DAB}{\sin\measuredangle BDA}}{\overline{AC} \cdot \frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle CDA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

□

LAUSE 3.1.28. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, γ sen sisään piirretty ympyrä, D ympyrän γ ja sivun AB yhteinen piste, E ympyrän γ ja sivun BC yhteinen piste ja F ympyrän γ ja sivun CA yhteinen piste. Merkitään $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ ja vielä $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Tällöin $\overline{AF} = \overline{AD} = s - a$, $\overline{BD} = \overline{BE} = s - b$, $\overline{CE} = \overline{CF} = s - c$.*



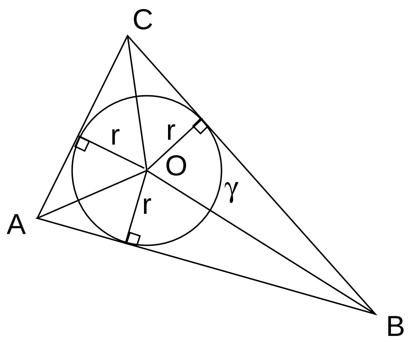
KUVA 151: LAUSE 4.1.11

Todistus. Olkoon O ympyrän γ keskipiste. Kuten lauseen 3.1.18 todistuksessa nähdään, että $\triangle ADO \cong \triangle AFO$, josta $\overline{AF} = \overline{AD}$. Vastaavasti $\overline{BD} = \overline{BE}$ ja $\overline{CE} = \overline{CF}$. Koska $A * F * C$, $A * D * B$ ja $B * E * C$ (Ks. jälleen 3.1.18:n tod.), niin $a = \overline{BE} + \overline{EC}$, $b = \overline{AF} + \overline{FC}$ ja $c = \overline{AD} + \overline{DB}$, joten

$$\begin{aligned} s - a &= \frac{1}{2}(a+b+c) - a = \frac{1}{2}(-a+b+c) = \frac{1}{2}(-\overline{BE} - \overline{EC} + \overline{AF} + \overline{FC} + \overline{AD} + \overline{DB}) \\ &= \frac{1}{2}(-\overline{BE} - \overline{EC} + \overline{AF} + \overline{CE} + \overline{AF} + \overline{BE}) = \overline{AF}. \end{aligned}$$

Vastaavasti laskemalla saadaan muut väitteen kaavat. □

LAUSE 3.1.29. (Heron)[19] *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $s = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$ sekä r kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretyn ympyrän säde. Tällöin* $\mathrm{ala}(ABC) = rs$.



KUVA 152: LAUSE 4.1.12

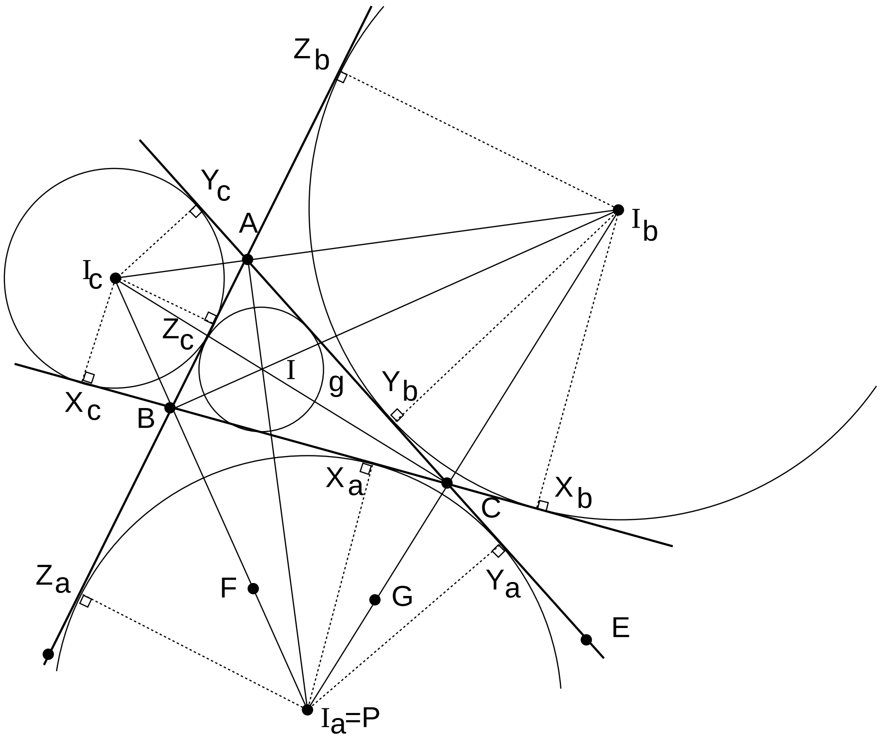
Todistus. Kolmion pinta-alan additiivisuusominaisuuden nojalla $\mathrm{ala}(ABC) = \mathrm{ala}(ABO) + \mathrm{ala}(BCO) + \mathrm{ala}(CAO)$, missä O on sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste. Lauseen 3.1.18 tarkastelujen nojalla näissä kaikissa kolmessa kolmiossa on r:n mittainen korkeusjana. Siten

$$\mathrm{ala}(ABO) = \tfrac{1}{2}r\,\overline{AB}, \quad \mathrm{ala}(BCO) = \tfrac{1}{2}r\,\overline{BC}, \quad \mathrm{ala}(CAO) = \tfrac{1}{2}r\,\overline{AC}$$

ja edelleen $\mathrm{ala}(ABC) = \frac{1}{2}r\,\overline{AB} + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r\,\overline{AC} = rs$. □

[19] HERON ALEKSANDRIALAINEN NOIN 10–75. Egypti

Kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa kaikkia kolmion kylkisuoria. Voi kysyä, onko olemassa muita ympyröitä, joilla on tämä sama ominaisuus. Vastaus on myönteinen, kuten seuraava kuva osoittaa: (Tässä siis $\triangle ABC$ on annettu kolmio, I sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja I_a, I_b ja I_c "ulkopuolelta sivuavan" kolmen ympyrän keskipisteet.)



Kuva 153: Kolmion sivuja sivuavat ympyrät

Keskipisteet I_a, I_b ja I_c löytyvät seuraavan lauseen perusteella. (Tämä muotoilu antaa I_a:n.)

LAUSE 1.3.30. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $D*B*A$ sekä $E*C*A$. Tällöin kulmien $\measuredangle A$ ja $\measuredangle DBC$ sekä $\measuredangle ECB$ puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä (joka on etsitty I_a).*

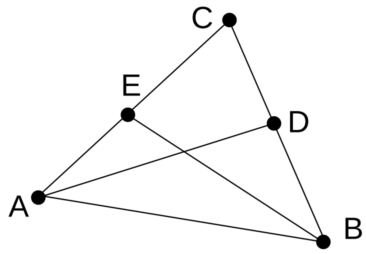
Todistus. Olkoon $\overrightarrow{BF}$ ulkokulman $\measuredangle ECB$ puolittaja. Tällöin $(\measuredangle FBC)^\circ < 90$ ja $(\measuredangle GCB)^\circ < 90$, joten $(\measuredangle FBC)^\circ + (\measuredangle GCB)^\circ < 180$. Eukleideen viidennen aksiooman eli lauseen 9.1.1 mukaan $\overleftrightarrow{BF}$ ja $\overleftrightarrow{CG}$ leikkaavat toisensa jossain pisteessä P se. $PF\overleftrightarrow{BC}$ ja $PG\overleftrightarrow{BC}$. Tällöin $P \in \overrightarrow{BF}$ ja $P \in \overrightarrow{CG}$ eli P on $P\overrightarrow{BF}$:n ja $\overrightarrow{CG}$:n leikkauspiste. Olkoon Y_a pisteen P kautta kulkevan $\overleftrightarrow{AC}$:n normaalin ja $\overleftrightarrow{AC}$:n leikkauspiste ja Z_a vastaavasti $\overleftrightarrow{AB}$:llä ja X_a vastaavasti $\overleftrightarrow{BC}$:llä. Tällöin $Z_a \in \overrightarrow{BD} \setminus \{B\}$, $X_a \in \overrightarrow{BC} \setminus \{B\}$, $X_a \in \overrightarrow{BC} \setminus \{C\}$ ja $Z_a \in \overrightarrow{BD} \setminus \{B\}$. Kaikki nämä todistetaan samalla tavalla, jolla lauseen 3.1.18 todistuksessa nähtiin, että $S \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$. Tällöin myös $Z_a \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ ja $Y_a \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$, koska $A * B * D$ ja $A * C * E$. Nyt $\triangle BX_aP \cong \triangle BZ_aP$ ja $\triangle CX_aP \cong \triangle CY_aP$; tämä seuraa SKK-säännöstä. Siis $PZ_a \cong PX_a \cong PY_a$. Tällöin $\triangle AZ_aP \cong \triangle AY_aP$, mikä seuraa lauseesta 2.4.21 ja siten $\measuredangle Z_a AP \cong \measuredangle Y_a AP$ eli

$$(**) \qquad \measuredangle BAP \cong \measuredangle CAP.$$

Jana PY_a ei voi leikata suoraa $\overleftrightarrow{AB}$, sillä jos Q olisi tällainen leikkauspiste, niin olisi $Q \neq Y_a$ ja tällöin pätisi $\overline{PQ} < \overline{PY_a} = \overline{PZ_a}$, joten olisi $Q \neq Z_a$ ja näin $\triangle PQZ_a$ olisi kolmio, jossa $\measuredangle Z_a$ on suora. Silloin olisi $\measuredangle Q < \measuredangle Z_a$ ja siis lauseen 2.4.22 mukaan $PZ_a < PQ$, mikä ei ole mahdollista. Siten tosiaan $PY_a\overleftrightarrow{AB}$ ja vastaavasti nähdään, että $PZ_a\overleftrightarrow{AC}$, joten P on kulman $\measuredangle BAC$ sisällä. Ehdon $(**)$ mukaan P on tällöin kulman $\measuredangle BAC = \measuredangle A$ puolittajalla ja siten kaikilla kolmella tarkasteltavalla puolittajalla. □

3.2. Vähän kehittyneempää euklidista geometriaa.

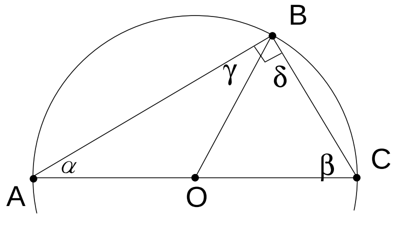
LAUSE 3.2.1. (Steiner ja Lehmus)[20] *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, $B * D * C$ ja $A * E * C$ siten, että $\overrightarrow{AD}$on kulman $\measuredangle CAB$ ja $\overrightarrow{BE}$ kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja. Jos $\overline{AD} = \overline{BE}$, niin $\triangle ABC$ on tasakylkinen: $\overline{AC} = \overline{BC}$.*



Kuva 154: Steinerin ja Lehmusin lause

Todistuksessa tarvitaan joitakin aputuloksia. Yksi niistä on, että Thaleen lauseelle 3.1.20 käänteinen tulos pätee myös:

LAUSE 3.2.2.(Thaleen lauseen käänteinen puoli). *Olkoon $\measuredangle ABC$ suora kulma. Tällöin B on ympyrällä, jonka halkaisija on AC.*



Kuva 155: Thaleen lauseen käänteinen puoli

[20] Jakob Steiner 1796–1863 ja Daniel Christian Ludolph Lehmus 1780–1863. Saksalaisia kumpikin.

Todistus. Olkoon O janan AB keskipiste. Merkitään $\alpha = (\measuredangle BAC)^\circ$, $\beta = (\measuredangle ACB)^\circ$, $\gamma = (\measuredangle ABO)^\circ$ ja $\delta = (\measuredangle OBC)^\circ$. Koska $\overrightarrow{BO}$ on kulman $\measuredangle ABC$ sisällä ja $\measuredangle ABC$ on suora kulma, niin $\gamma + \delta = 90$. Edelleen kulmasummalauseen 3.1.7 nojalla $\alpha + \beta = 90$. Riittää osoittaa, että $\overline{OB} = \overline{OA}(= \overline{OC})$. Antiteesi: $\overline{OB} > \overline{OA}$ tai $\overline{OB} < \overline{OA}$. Jos $\overline{OB} < \overline{OA}$, niin lauseen 2.4.22 mukaan $\gamma < \alpha$, jolloin kaavoista $\alpha + \beta = 90$ ja $\gamma + \delta = 90$ seuraa, että $\beta < \delta$. Tällöin uudelleen lauseen 2.4.22 nojalla $\overline{OB} < \overline{OC}$. Nyt $\overline{OA} < \overline{OB} < \overline{OC}$, mikä on mahdotonata, koska O on $\overline{AC}$:n keskipiste. Vastavasti päästään ristiriitaan jos $\overline{OA} > \overline{OB}$. □

Seuraavan apulauseen sanoma on, että kosini on vähenevä funktio.

LAUSE 3.2.3. *Jos α ja β ovat kulmia siten, että $\alpha < \beta$, niin $\cos\alpha > \cos\beta$.*

Todistus. 1° Olkoot ensin α ja β teräviä kulmia. Voidaan olettaa (vrt. kosinin määritelmään) , että $\beta = \measuredangle ABC$, missä $\measuredangle C$ on suora kulma, jolloin siis

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Koska $\alpha < \beta$, niin β:n sisällä on puolisuora $\overrightarrow{BD}$ siten, että $\measuredangle DBC \cong \alpha$. Puomilauseen nojalla $\overrightarrow{BD}$ leikkaa janaa AC. Olkoon leikkauspiste E. Tästä voi vaikka harjoitustehtävänä päätellä, että

$$\cos\alpha = \cos\measuredangle DBC = \cos\measuredangle EBC = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}.$$

Koska siis $\cos\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$, niin riittää osoittaa, että $\overline{BE} < \overline{BA}$. Tämä onkin helppoa, sillä $\overline{CE} < \overline{CA}$, koska $C * E * A$, joten Pythagoraan lause antaa

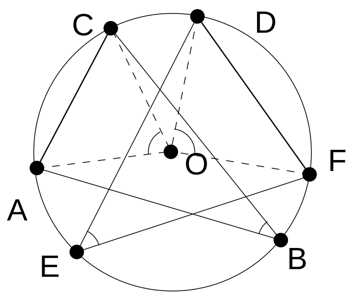
$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CE}^2} < \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2} = \overline{BA}.$$

2° Jos α on terävä ja β on suora tai tylppä, niin kosinin määritelmän nojalla suoraan $\cos\alpha > 0 \geq \cos\beta$.

3° Jos α on suora niin β on tylppä, jolloin taas kosinin määritelmän nojalla $\cos\alpha = 0 > \cos\beta$.

4° Jäljellä on enää tapaus, jossa sekä α että β ovat tylppiä. Tällöin α:n ja β:n täydennyskulmat α' ja β' ovat teräviä ja oletuksen $\alpha < \beta$ perusteella $\alpha' > \beta'$. Tällöin kohdan 1° nojalla $\cos\alpha' < \cos\beta'$, joten kosinin määritelmän mukaan $\cos\alpha = -\cos\alpha' > cos\beta' = \cos\beta$. □

LAUSE 3.2.4. *Olkoon α ympyrä ja A, B, C, D, E ja $F \in \alpha$ siten, että sekä $\measuredangle ABC$ että $\measuredangle DEF$ ovat teräviä kulmia. Tällöin $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ jos ja vain jos $AC < DF$.*



Kuva 156: Pienempi kulma - pienempi jänne

Todistus. Koska kulmat ovat teräviä, ei Thaleen lauseen 3.1.20 perusteella AC eikä DF voi olla α:n halkaisija. Tällöin kehäkulmalauseen 3.1.21 mukaan, edelleen kulmien terävyyden nojalla, $(\measuredangle ABC)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle AOC)^\circ$ ja $(\measuredangle DEF)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle DOF)^\circ$, missä O on α:n keskipiste.

"$\Rightarrow$" Olkoon $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. Tällöin $(\measuredangle AOC)^\circ = 2(\measuredangle ABC)^\circ < 2(\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DOF)^\circ$. Lauseen 3.2.3 mukaan

$$(*) \qquad \cos\measuredangle AOC > \cos\measuredangle DOF.$$

Kosinilauseen nojalla

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OC}\cos\measuredangle AOC \text{ ja}$$
$$(**) \qquad \overline{DF}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OF}^2 - 2\overline{OD}\,\overline{OF}\cos\measuredangle DOF.$$

Väite $AC < DF$ seuraa nyt ehdosta $(*)$.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että $AC < DF$. Kaavat $(**)$ pätevät myös nyt, ja oletuksen nojalla saadaan edelleen kaava $(*)$. Tästä ja lauseesta 3.2.3 seuraa, että $\measuredangle AOL < \measuredangle DOF$, josta edelleen

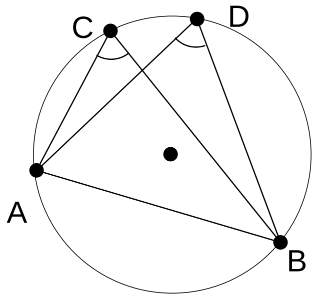
$$(\measuredangle ABC)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle AOC)^\circ < \tfrac{1}{2}(\measuredangle DOF)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ$$

eli $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. □

Huom: Edellisen lauseen väite ei päde ilman oletusta kulmien terävyydestä, joka takaa, että jänteitä AC ja DF "katsellaan keskipisteen puolelta".

Kuva 157: Pienempi kulma - kuitenkin suurempi jänne

LAUSE 3.2.5 (Käänteinen kehäkulmalause). *Olkoot A, B, C, ja D eri pisteitä se. $CD\overleftrightarrow{AB}$ ja $\measuredangle ACB \cong \measuredangle ADB$. Tällöin on olemassa ympyrä α siten, että $A, B, C, D \in \alpha$.*



Kuva 158: Käänteinen kehäkulmalause

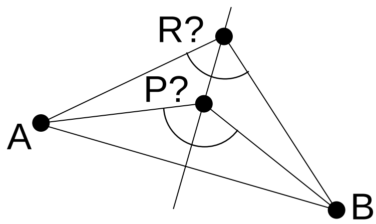
Todistus. $\triangle ABC$ on kolmio. Olkoon β kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretty ympyrä, keskipisteenä P. Olkoon vastaavasti γ kolmion $\triangle ABD$ ympäri piirretty ympyrä, keskipisteenä R. Tarkastellaan kolmea eri tapausta; kulma $\measuredangle C \cong \measuredangle D$ on joko 1) suora, 2) terävä tai 3) tylppä.

Tapauksessa 1) jana AB on lauseen 3.2.2 nojalla sekä β:n että γ:n halkaisija, joten β:lla ja γ:lla on sama keskipiste, nimittäin janan AB keskipiste. Toisin sanoen $R = P$. Ympyröillä β ja γ on nyt myös sama säde $\frac{1}{2}\overline{AB}$, joten ne ovat sama ympyrä ja kelpaavat etsityksi ympyräksi α.

Tapauksessa 2) P ei voi olla suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, sillä muuten AB olisi β:n halkaisija, jolloin Thaleen lauseen 3.1.20 mukaan $\measuredangle C$ olisi suora kulma vastoin oletusta. Kehäkulmalauseen 3.1.21:n nojalla $CP\overleftrightarrow{AB}$, sillä lauseen vaihtoehto b) ei tule kysymykseen, koska $\measuredangle C$ on terävä. Vastaavasti myös $DR\overleftrightarrow{AB}$. Koska oletuksen mukaan $CD\overleftrightarrow{AB}$, niin $PR\overleftrightarrow{AB}$. Tällöin kehäkulmalauseen a) -kohdan mukaan

$$(\measuredangle APB)^\circ = 2(\measuredangle ACB)^\circ \overset{\text{oletus}}{=} 2(\measuredangle ADB)^\circ = (\measuredangle ARB)^\circ.$$

Lauseen 2.6.9 nojalla sekä P että R ovat AB:n keskinormaalilla ja koska nyt $PR\overleftrightarrow{AB}$ ja $\measuredangle APB \cong \measuredangle ARB$, niin on oltava $P = R$; tämähän seuraa vaikkapa ulkokulmalauseesta 2.4.19 sovelletuna kolmioon $\triangle APR$. Siis nytkin $\beta = \gamma$ kelpaa α:ksi.

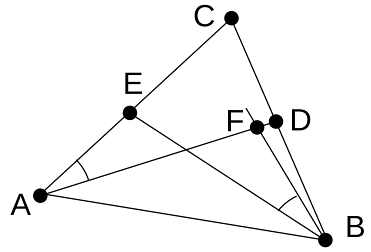


Kuva 159: Ulkokulmalauseen nojalla $P = R$.

Tapauksessa 3) joudutaan kehäkulmalauseen 3.1.21 vaihtoehtoon b), jonka mukaan $C\overleftrightarrow{AB}P$ ja $D\overleftrightarrow{AB}R$. Tässäkin tapauksessa oletus $CD\overleftrightarrow{AB}$ antaa tiedon $PR\overleftrightarrow{AB}$ ja loppu menee samoin kuin kohdassa 2). □

Nyt voidaan lopulta todistaa Steinerin ja Lehmusin lause.

Lauseen 3.2.1 todistus. Palautetaan aluksi mieleen lauseen oletukset ja väite: $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * C$, $A * E * C$, $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\measuredangle CAB$ puolittaja ja $\overrightarrow{BE}$ kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja ja $\overline{AD} = \overline{BE}$. Väitetään, että $\overline{AC} = \overline{BC}$. Antiteesi: $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Tällöin lauseen 2.4.9 b) perusteella $\measuredangle A \neq \measuredangle B$. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voidaan olettaa, että $\measuredangle A < \measuredangle B$. Tällöin myös $\frac{1}{2}\measuredangle A < \frac{1}{2}\measuredangle B$ eli $\measuredangle CAD < \measuredangle CBE$. Silloin kulman $\measuredangle CBE$ sisältä voidaan valita F siten, että $\measuredangle CAD \cong \measuredangle FBE$. Puomilausetta toistuvasti käyttämällä voidaan olettaa, että $A * F * D$.



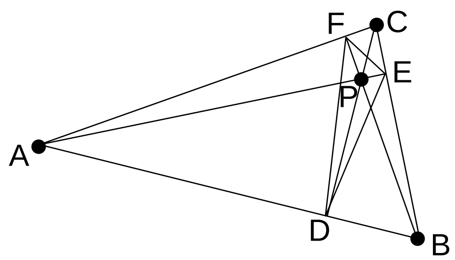
Kuva 160: Steinerin ja Lehmusin lauseen todistus

Nyt $FD\overleftrightarrow{EC}$ ja $DB\overleftrightarrow{EC}$, joten $FB\overleftrightarrow{EC}$. Toisaalta $FD\overleftrightarrow{EB}$ ja $CD\overleftrightarrow{EB}$, joten $FC\overleftrightarrow{EB}$. Siten F on $\measuredangle CEB$:n sisällä, joten $\overrightarrow{EF}$ leikkaa puomilauseen mukaan janaa CB. Näin $C\overleftrightarrow{EF}B$. Toisaalta $A\overleftrightarrow{EF}C$, joten $AB\overleftrightarrow{EF}$. Tällöin voidaan käyttää lausetta 3.2.5, jonka mukaan A, E, F ja B ovat samalla ympyrällä. Lukija voi todistaa harjoitustehtävänä, että kulmat $\measuredangle EAF$ ja $\measuredangle FBE$ ovat "puolikaskulmina" teräviä. $AF \overset{A*F*D}{<} AD \overset{\text{oletus}}{<} BE$, joten lauseen 3.2.4 mukaan $\measuredangle ABF < \measuredangle EAB$. Mutta tehtyjen valintojen nojalla saadaan ristiriita:

$$(\measuredangle ABF)^\circ = (\measuredangle ABE)^\circ + (\measuredangle EBF)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle B)^\circ + \tfrac{1}{2}(\measuredangle A)^\circ) \overset{\measuredangle B > \measuredangle A}{>} (\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle EAB)^\circ.$$

$\square$

Seuraavassa tarkastelussa osoitetaan, että teräväkulmaisen kolmion korkeusjanat (janat!) leikkaavat toisensa samassa pisteessä P (ks. lause 3.2.6), jota sanotaan ko. kolmion *ortokeskukseksi.* Teräväkulmaisen kolmion korkeusjanojen ja vastaavien kylkien leikkauspisteet kärkinä muodostettu uusi kolmio on alkuperäisen *ortokolmio.* Lauseena 3.2.8 osoitetaan, että teräväkulmaisen kolmion ortokeskus on sen ortokolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

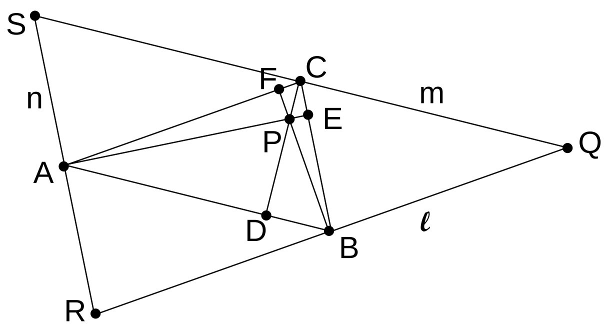


Kuva 161: Ortokeskus P ja ortokolmio $\triangle DEF$

LAUSE 3.2.6. *Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, $A * D * B$ siten, että $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $B * E * C$ siten, että $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AE}$ ja $C * F * A$ siten, että $\overleftrightarrow{CA} \perp \overleftrightarrow{BF}$. Tällöin janat AE, BF ja CD leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Olkoot ℓ, m ja n suoria, jotka toteuttavat ehdot

$$\begin{aligned} \ell &\parallel \overleftrightarrow{AC} \text{ ja } \ell \text{ kulkee } B\text{:n kautta} \\ m &\parallel \overleftrightarrow{AB} \text{ ja } \ell \text{ kulkee } C\text{:n kautta} \\ n &\parallel \overleftrightarrow{BC} \text{ ja } \ell \text{ kulkee } A\text{:n kautta.} \end{aligned}$$



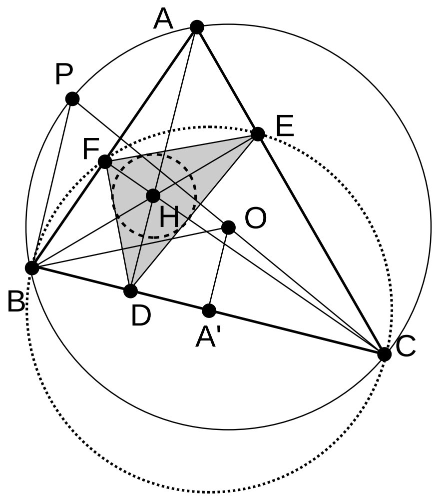
Kuva 162: Korkeusjanojen leikkaupiste

Lauseen 3.1.2 nojalla m ja n leikkaavat toisensa, olkoon leikkauspiste S; vastaavasti m ja ℓ leikkaavat toisensa pisteessä Q sekä n ja ℓ pisteessä R. Koska ℓ, m ja n ovat eri suoria, niin S, Q ja R ovat eri pisteitä ja $\triangle SQR$ on kolmio. Nyt nelikulmio $\square ABCS$ on suunnikas, joten $\overline{AB} = \overline{SC}$. Vastaavasti $\square ABQC$ on suunnikas, joten $\overline{AB} = \overline{CQ}$ ja siis $\overline{SC} = \overline{CQ}$ ja C on janan SQ keskipiste. Koska $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{AB} \parallel m$, niin 3.1.5:n mukaan $\overleftrightarrow{CD} \perp m$ ja siten $\overleftrightarrow{CD}$ on janan SQ keskinormaali. Vastaavasti nähdään, että $\overleftrightarrow{AE}$ on janan SR ja $\overleftrightarrow{BF}$ janan QR keskinormaali. Nyt voidaan käyttää lausetta 3.1.7, jonka mukaan $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ leikkaavat toisensa samassa pisteessä P. Jotta nimenomaan korkeusjanat leikkaisivat P:ssä, pitää olla $A*P*E$, $B*P*F$ ja $C*P*D$. Tässä tarvitaan $\triangle ABC$:n teräväkulmaisuutta. Sen nojalla nähdään ensin (kuten suorakulmion olemassaoloa koskevan lauseen 2.5.25 todistuksessa), että $A * D * B$, $B * E * C$ ja $C * F * A$. Tällöin $A\overleftrightarrow{CD}B$ ja $BE\overleftrightarrow{CD}$, joten $A\overleftrightarrow{CD}E$ ja siten $A * P * E$. Muut ehdot todetaan vastaavasti. $\square$

LAUSE 3.2.7. *Mielivaltaisen kolmion korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Edellisen lauseen todistuksen alkuosassa, jossa nähtiin, että $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ leikkaavat toisensa samassa pisteessä P, ei tarvittu oletusta kolmion teräväkulmaisuudesta! $\square$

LAUSE 3.2.8. *Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio ja $\triangle DEF$ sen ortokolmio. Tällöin $\triangle ABC$:n ortokeskus on kolmion $\triangle DEF$ sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste.*



KUVA 163: ORTOKESKUS

Todistus. Olkoon H kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja O sen ympäri piirretyn ympyrän γ keskipiste. Olkoon P ympyrällä γ siten, että $P{*}O{*}C$, jolloin $P \neq B$, sillä muuten $\measuredangle A$ olisi suora kulma. Siten $\measuredangle BPC$ on kulma ja $\overleftrightarrow{BC}$ ei kulje O:n kautta. Jos nyt $AP\overleftrightarrow{BC}$ — kuten kuvassa — niin kehäkulmalauseen 3.1.21 mukaan $\measuredangle BPC \cong \measuredangle BAC$. Ja todellakin on $AP\overleftrightarrow{BC}$, sillä muuten olisi $A\overleftrightarrow{BC}P$ ja edelleen $O\overleftrightarrow{BC}A$, jolloin kehäkulmalauseen b) -kohdan mukaan

$$(\measuredangle BAC)^\circ = 180 - \overbrace{\tfrac{1}{2}(\measuredangle BOC)^\circ}^{<90} > 90$$

vastoin teräväkulmaisuusoletusta. Siis todellakin $\measuredangle P = \measuredangle A$.

Olkoon A' janan BC keskipiste, jolloin SSS-säännön nojalla kolmiot $\triangle BA'O$ ja $CA'O$ ovat yhtenevät ja siten $\measuredangle BA'O$ on suora kulma. Thaleen lauseen 3.1.20 nojalla myös $\measuredangle PBC$ on suora kulma ja siten $\triangle PBC \sim \triangle OA'C$, jolloin $\measuredangle A'OC \cong \measuredangle P$ ja edelleen $\measuredangle A'OC \cong \measuredangle BAC \cong \measuredangle BOA'$. Merkitään $\alpha = 90 - (\measuredangle BAC)^\circ$. Kolmio BOC on tasakylkinen ja $(\measuredangle BOC)^\circ = 2 \cdot (\measuredangle BAC)^\circ$, joten

$$(\measuredangle OBC)^\circ = (\measuredangle OCB)^\circ = \tfrac{1}{2}\big(180 - (\measuredangle BOC)^\circ\big) = 90 - (BAC)^\circ = \alpha.$$

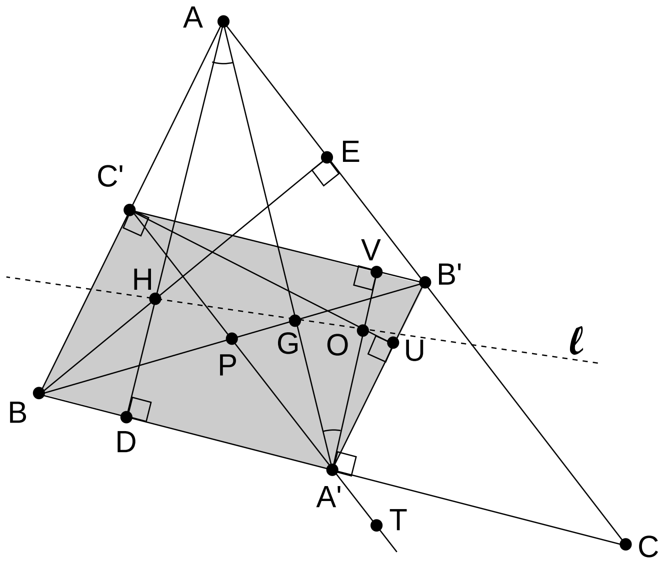
Koska kulmat $\measuredangle BFC$ ja $\measuredangle BEC$ ovat suoria ja koska $FE\overleftrightarrow{BC}$ (mikä seuraa siitä, että $\triangle ABC$ on teräväkulmainen, jolloin $B * F * A$ ja $C * E * A$ eli $FA\overleftrightarrow{BC}$ ja $EA\overleftrightarrow{BC}$), niin käänteisen kehäkulmalauseen 3.2.5 perusteella pisteiden B, F, E ja C kautta kulkee ympyrä. Koska $BC\overleftrightarrow{FE}$ seuraa taas kolmion $\triangle ABC$ teräväkulmaisuudesta, saadaan lauseen 3.1.21 perusteella $\measuredangle FBE \cong \measuredangle FCE$ ja edelleen $\measuredangle ABE \cong \measuredangle FCA$. Suorakulmaisesta kolmiosta $\triangle BAE$ voidaan kulmasummalauseen avulla laskea: $(\measuredangle ABE)^\circ = \alpha$ ja siten myös $(\measuredangle FCA)^\circ = \alpha$.

Vastaavasti myös A, F, D ja C ovat samalla ympyrällä ja kehäkulmalauseen nojalla $(\measuredangle HDF)^\circ = (\measuredangle ADF)^\circ = (\measuredangle FCA)^\circ = \alpha$. Samoin päätellään, että $(\measuredangle HDE)^\circ = \alpha$, joten $\overrightarrow{CH}$ on kulman $\measuredangle FDE$ puolittaja. Erityisesti siis H on kulman $\measuredangle FDE$ puolittajalla. Vastaava tarkastelu, merkintöjä tietenkin vaihtaen, osoittaa, että H on myös kulmien $\measuredangle DEF$ja $\measuredangle DFE$ puolittajalla. Siis H on $\triangle DEF$:n kulmanpuolittajien leikkauspiste eli $\triangle DEF$:n sisään piirretyn ympyrän keskipiste. □

Ortokeskus eli korkeusjanojen leikkauspiste määriteltiin edellä ainoastaan teräväkulmaiselle kolmiolle. Huomautuksen 3.2.7 mukaan korkeusjanojen määräämät suorat leikkaavat myös tylppä- tai suorakulmaisessa tapauksessa. Sovitaan, että tylppä- tai suorakulmaisen kolmion *ortokeskus* on näiden suorien leikkauspiste. Lause 3.2.9 pätee myös tylppä- tai suorakulmaiselle kolmiolle, mutta todistus on kirjoitettava uudestaan, sillä pisteet vaihtavat järjestystään.

LAUSE 3.2.9. *Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, H sen ortokeskus, G sen painopiste ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Tällöin H, G ja O ovat samalla suoralla ℓ ja G jakaa janan OH suhteessa 2:1 siten, että $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GO}$. Jos $O = H$, niin myös $G = H$.*

Huom. Lauseen 3.2.9 suoraa ℓ kutsutaan kolmion $\triangle ABC$ *Eulerin suoraksi*[21].



KUVA 164: EULERIN SUORA

Todistus. Olkoon A' sivun BC keskipiste, B' sivun CA keskipiste ja C' sivun AB keskipiste. On sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että $\triangle BA'C' \sim \triangle BCA$. Tästä seuraa, että $\measuredangle C \cong \measuredangle BA'C'$. Jos valitaan T siten, että $C' * A' * T$, niin $\measuredangle C'A'B \cong \measuredangle TA'C$ "ristikulmina" ja $A\overleftrightarrow{BC}T$ (koska $AC'\overleftrightarrow{BC}$ ja $C'\overleftrightarrow{BC}T$), jolloin lauseen 2.4.15 nojalla $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$. Vastaavasti nähdään, että $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Tällöin nelikulmiot $\square BA'B'C'$, $\square AC'A'B'$ ja $\square CB'C'A'$ ovat suunnikkaita. On toinen sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että mielivaltaisen suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Siten janat $C'A'$ ja BB' leikkaavat pisteessä P siten, että $C'P \cong PA'$. Tällöin P on janan $C'A'$ keskipiste ja siten $B'P$ on

[21] LEONHARD EULER 1707 - 1783. Sveitsi-Venäjä-Saksa.

$\triangle A'B'C'$:n keskijana. Siis keskijana $B'P$ on janalla BB' eli $\triangle ABC$:n keskijanalla. Vastaavasti nähdään, että myös muut $\triangle A'B'C'$:n keskijanat ovat vastaavilla keskijanoilla, joten $\triangle A'B'C'$:n ja toisaalta $\triangle ABC$:n keskijanat leikkaavat kaikki samassa pisteessä G. Siten G on myös kolmion $A'B'C'$ painopiste.

$$\begin{array}{rl} \text{Olkoon} & D \text{ suoralla } \overleftrightarrow{BC} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}, \\ & E \text{ suoralla } \overleftrightarrow{AC} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}, \\ & U \text{ suoralla } \overleftrightarrow{A'B'} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{C'U} \perp \overleftrightarrow{A'B'}, \\ \text{ja} & V \text{ suoralla } \overleftrightarrow{B'C'} \text{ siten, että } \overleftrightarrow{C'U} \perp \overleftrightarrow{A'B'}. \end{array}$$

Koska $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ niin lauseen 3.1.5 mukaan $\overleftrightarrow{C'U} \perp \overleftrightarrow{A'B'}$ ja koska C' on janan AB keskipiste, niin $\overleftrightarrow{C'U}$ on AB:n keskinormaali. Koska AB:n ja BC:n keskinormaalit leikkaavat $\triangle ABC$:n ympäri piirretyn ympyrän keskipisteessä O ja toisaalta $\overleftrightarrow{C'U}$ ja $\overleftrightarrow{A'V}$ leikkaavat $\triangle A'B'C'$:n ortokeskuksessa, piste O on $\triangle A'B'C'$:n ortokeskus. Koska

$$\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB} \quad \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'} \text{ ja } \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'},$$

niin on kolmas sopiva harjoitustehtävä osoittaa, että

$$(*) \qquad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Koska A' on BC:n keskipiste ja $\triangle BA'C' \sim \triangle BCA$, niin lauseen 3.1.10 nojalla

$$(**) \qquad \overline{A'C'} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}.$$

Nyt O on kolmion $\triangle A'B'C'$ ja H on kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus, joten ehtojen $(*)$ ja $(**)$ mukaan voi neljäntenä harjoitustehtävänä osoittaa, että

$$\overline{A'O} = \tfrac{1}{2}\overline{GA}.$$

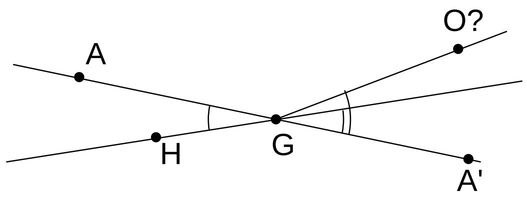
Koska O on BC:n keskinormaalilla ja $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$, niin pätee joko 1°: $\overleftrightarrow{OA} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ tai 2°: $\overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{AD}$.

Tapaus 1°: Tässä $A' \neq D$ ja merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla $(B \leftrightarrow C)$ voidaan olettaa, että $\overleftrightarrow{BDAA'}$ kuten kuvassa, jolloin $B * D * A'$, mikä seuraa kolmion $\triangle ABC$ teräväkulmaisuudesta. Koska $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ niin myös $\triangle A'B'C'$ on teräväkulmainen ja siten $B' * V * C'$. Koska $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, ja $\measuredangle D \cong \measuredangle V$ (suora kulma) niin $\triangle ABD \sim \triangle A'B'V$. Koska $\triangle ABC \sim \triangle B'A'C$, niin $\overline{B'A'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ja siten 3.1.10:n nojalla $\overline{B'V} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Koska $B * D * A'$ niin $\overline{BD} < \overline{A'B} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$. Koska P on $\overline{B'C'}$:n keskipiste, niin $\overline{B'C'} = 2 \cdot \overline{B'P}$. Siten $\overline{B'V} = \frac{1}{2}\overline{BD} < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{B'P} = \overline{B'P}$ ja koska $B' * V * C'$ niin on oltava $P * V * B'$ eli $C' * P * V$. Koska P sisälyy suoraan $\overleftrightarrow{AA'}$ niin $\overleftrightarrow{C'AA'V}$. Koska kolmion $\triangle A'B'C'$ teräväkulmaisuuden nojalla O sisältyy suoraan $A'V$, niin $\overleftrightarrow{VOAA'}$ ja siten $\overleftrightarrow{OAA'B}$ ja edelleen $\overleftrightarrow{OAA'D}$. Nyt siis

$\overleftrightarrow{OA'} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, joten lauseen 3.1.4 mukaan $\measuredangle DAA' \cong \measuredangle PA'A$. Teräväkulmaisuuden nojalla on $A * G * A'$ ja $A * H * D$, joten on voimassa

$$(***) \qquad \triangle HAG \sim \triangle OA'G.$$

Erityisesti $\measuredangle AGH \sim \measuredangle A'GO$. Koska $A * GA'$ ja $= \overleftrightarrow{AA'H}$ (mikä seuraa siitä, että $\overleftrightarrow{OAA'D}$ ja $A * H * D$), niin yhtälö $\triangle HAG = \triangle OA'G$ ovat ristikulmia koskevan tuloksen 2.4.6 nojalla mahdollinen vain kun $H * G * O$.



Kuva 165: Lauseen 3.2.9 todistuksesta

Ehto $\overline{HG} = 2 \cdot GO$ seuraa edellä todistetusta tiedosta $\overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH}$, tiedosta $\triangle HAG \sim \triangle OA'G$ ja lauseesta 3.1.10. Tapaus 1°on käsitelty.

Tapaus 2°: Nyt oletamme $\overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{AD}$. Tällöin $A' = D$ ja $\overleftrightarrow{AD}$ on BC:n keskinormaali ja myös keskijana. Nyt pisteet H, G ja O sijaitsevat samalla suoralla $\overleftrightarrow{AD}$. Jos $O = H$, niin $\overleftrightarrow{BE}$ on AC:n keskinormaali ja keskijana, joten G on suorilla $\overleftrightarrow{BE}$ ja $\overleftrightarrow{AD}$, siis sama kuin niiden leikkauspiste O eli H. Voidaan siis olettaa, että $O \neq H$. Edellä on todettu, että $\overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH}$ ja $\overline{A'G} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GA}$. Koska $\triangle ABC$ on teräväkulmainen, on $A * H * A'$ ja aina $A * G * A'$. Lisäksi, kuten todettiin, O on kolmion $\triangle A'B'C'$ ortokeskus ja $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, joten myös $\triangle A'B'C'$ on teräväkulmainen ja siis $A' * O * V$. Koska $A * P * A'$, niin tällöin $A' * O * A$. Siis pisteet H, G ja O sijaitsevat samalla suoralla $\overleftrightarrow{AA'}$ ja joko $A' * O * H$ (tapaus i) tai sitten $A'HO$ (tapaus ii).

Tapauksessa i) eli olettaen $A' * O * H$ on $O * H * A$, joten $\overline{OA} > \overline{HA}$ ja $\overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}$. Tällöin on oltava $\overline{A'O} < \frac{1}{3} \cdot AA*$, sillä $\overline{A'O} + \overline{OA} = \overline{AA'}$. Ehdosta $\overline{A'G} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GA}$ saadaan $\overline{A'G} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AA'}$, joten $A' * O * G$. Lisäksi ehdosta $\frac{1}{2} \cdot \overline{AH} = \overline{A'O} < \frac{1}{3} \cdot \overline{AA'}$ saadaan $\overline{AH} < \frac{2}{3} \cdot \overline{AA'}$, jolloin, koska $\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AA'}$, on $G * H * A$. Tällöin

$$\overline{OG} \overset{A'*O*G}{=} \overline{A'G} - \overline{A'O} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GA} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \overset{G*H*A}{=} \frac{1}{2} \cdot \overline{GH}$$

eli väite pätee. Vastaavasti tapauksessa ii) eli kun $A' * H * O$ voidaan päätellä, että

$$\overline{A'O} > \overline{A'H} \implies \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} > \overline{A'H} \implies \overline{A'H} < \frac{1}{3}\overline{AA'} \implies A' * G * O,$$

josta

$$\overline{OG} \overset{A'*G*O}{=} \overline{A'O} - \overline{A'G} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AG} \overset{H*G*A}{=} \frac{1}{2} \cdot \overline{HG}.$$

$\square$

IV Liikkeet ja Poincarén malli

"Tyhjästä olen luonut ihmeellisen uuden maailmankaikkeuden." (Janos Bolyai)

Luvussa IV konstruoidaan Poincarén malli, jossa muut aksioomat pätevät, mutta paralleeliaksiooma ei. Konstruktion pohjana on euklidinen geometria, joten tulee todistetuksi, että jos euklidinen geometria on ristiriidaton, niin myös geometria, jossa paralleeliaksiooma **ei päde** on ristiriidaton. Sellaisessa geometriassa syntyy uudenlaisia ja outoja geometrisia tilanteita. Pätee esimerkiksi kolmioiden yhtenevyyskriteeri KKK. Tätä *epäeuklidista*, täsmällisemin sanoen *hyperbolista geometriaa* kehittivät ensimmäisinä Bolyai, Lobatševski ja Gauss.[22]

Aloitamme tarkastelemalla peilauksia euklidisessa geometriassa ja jatkamme konstruoimalla halutun mallin niiden avulla. Jatkossa samastetaan — mukavuussyistä — suorat ja niiden pisteiden joukot, ts. käytetään tulkintaa $\ell = \{P \mid \ell \text{ kulkee } P\text{:n kautta}\}$ ja merkitään $P \in \ell$, kun ℓ kulkee P:n kautta. Muistetaan myös, että huomautuksen 11 yhteydessä on sovittu merkittävän $\mathcal{T} = \{P \mid P \text{ on piste}\}$. $\mathcal{T}$ on siis "koko taso".

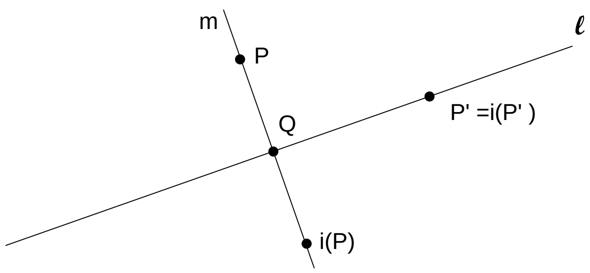
4.1. Peilaukset.

Peilaus suoran suhteen.

Määritelmä 4.1. Olkoon ℓ suora. *Peilaus suoran ℓ suhteen* on kuvaus

$$i : \mathcal{T} \to \mathcal{T},$$

joka määritellään seuraavasti. Jos $P \in \ell$, niin $i(P) = P$, ja jos $P \notin \ell$, niin olkoon m pisteen P kautta kulkeva ℓ:n normaali ja Q suorien ℓ ja m leikkauspiste. Sovitaan, että $i(P)$ on piste, joka toteuttaa ehdot $i(P) * Q * P$ ja $i(P)Q \cong QP$.



KUVA 166: PEILAUS SUORAN SUHTEEN

Huomautus 35. Normaalin olemassaolon ja yksikäsitteisyyden sekä aksiooman (H8) nojalla $i(P)$ on olemassa ja yksikäsitteisesti määrätty jokaisella P, joten i on kuvaus. Edelleen määritelmästä seuraa, että $i(i(P)) = P$ kaikilla P, joten i on itsensä käänteiskuvaus, $i = i^{-1}$, erityisesti i on bijektio.

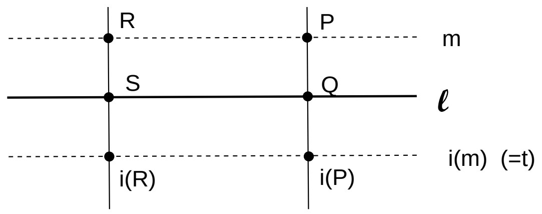
LAUSE 4.1.1. *Olkoon i peilaus suoran ℓ suhteen ja m mielivaltainen suora. Tällöin $i(m)$ on suora.*

---

[22] JANOS BOLYAI 1802–1860. Unkari (nyk. Romaniaa), CARL FRIEDRICH GAUSS 1777–1855. Saksa. NIKOLAI IVANOVITS LOBATŠEVSKI 1792–1856. Venäjä.

Huomautus 36. Tähän tarvitaan tulkintaa suorasta pistejoukkona. Alun perinhän i ei kuvaa suoria minnekään, vaan i on määritelty ainoastaan pisteille ja kuvajoukkokin muodostuu pisteistä. Lause 4.1.1 takaa, että luonnollisella tavalla muodostuu kuvaus $\{\text{suorat}\} \to \{\text{suorat}\}$.

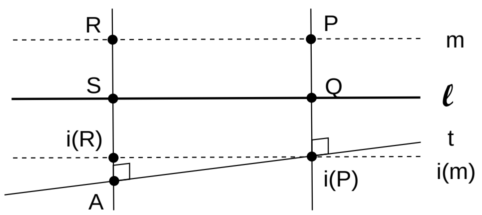
Todistus. Jos $m = \ell$, niin $i(m) = \ell$ ja asia on selvä. Olkoon siis $m \neq \ell$. Tässä on kaksi mahdollisuutta: joko a) $m \parallel \ell$ tai sitten b) m leikkaa suoraa ℓ.



KUVA 167: PEILIN SUUNTAISEN SUORAN PEILIKUVA ON SUORA

Tapaus a): Olkoon $P \in m$ mielivaltainen ja t pisteen $i(P)$ kautta kulkeva suora siten, että $t \parallel \ell$. Suoran t olemassaolo seuraa lauseesta 2.4.18. Osoitetaan, että $i(m) = t$.

Osoitetaan ensin, että $i(m) \subset t$. Olkoon $R \in m$. Tapauksessa $R = P$ ainakin on $i(R) \in t$. Olkoon $R \neq P$. Olkoon Q suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{Pi(P)}$ leikkauspiste ja S vastaavasti suorien ℓ ja $\overleftrightarrow{Ri(R)}$ leikkauspiste. Peilauksen i määritelmän mukaan $P * Q * i(P)$ ja $R * S * i(R)$ ja suorat $\overleftrightarrow{P\,i(P)}$ ja $\overleftrightarrow{R\,i(R)}$ ovat ℓ:n normaaleja. Lauseen 2.4.17 mukaan $\overleftrightarrow{P\,i(P)} \parallel \overleftrightarrow{R\,i(R)}$. Koska $m \parallel \ell$, niin $\square SQPR$ on suunnikas. Lauseen 3.1.9 nojalla $\overline{RS} = \overline{PQ}$, joten i:n määritelmän mukaan $\overline{S\,i(R)} = \overline{SR} = \overline{PQ} = \overline{Q\,i(P)}$. Lauseen 3.1.5 ja t:n valinnan mukaan $\overleftrightarrow{P\,i(P)}$ ja $\overleftrightarrow{R\,i(R)}$ ovat myös t:n normaaleja. Erityisesti $\overleftrightarrow{R\,i(R)}$ leikkaa suoraa t, olkoon leikkauspiste A.

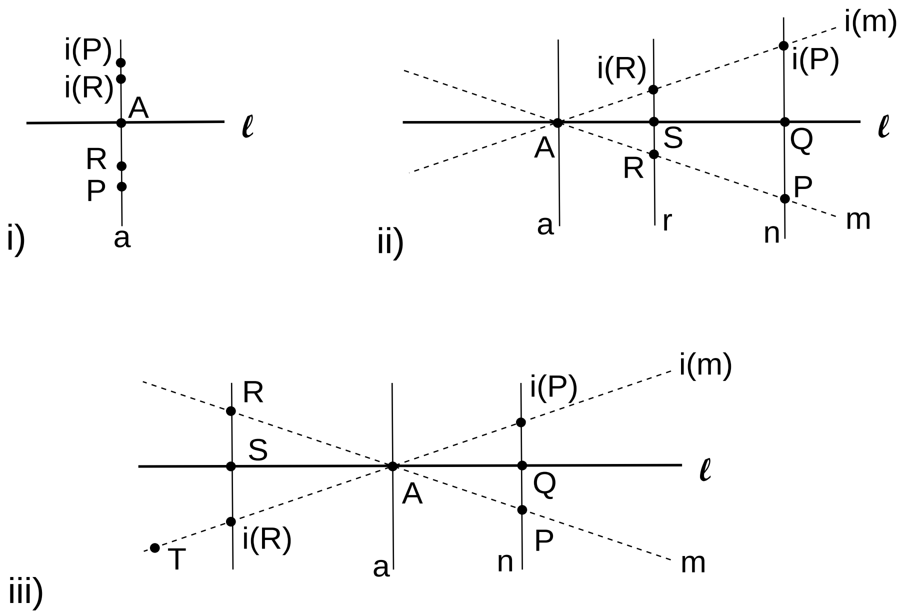


KUVA 168: APUPISTE A

Tässä $\square A\,i(P)QS$ on suunnikas, joten 3.1.9:n mukaan $\overline{SA} = \overline{Q\,i(P)}$. Siten $S\,i(R) \cong SA$. Koska $m \parallel \ell$, niin $PR\ell$ ja koska $t \parallel \ell$, niin $A\,i(P)t$. Toisaalta $P\ell\,i(P)$ ja $R\ell\,i(R)$, joten $A\,i(P)\ell$. Tällöin $A \in \overrightarrow{S\,i(R)}$. Koska siis $S\,i(R) \cong SA$, niin tämä on aksiooman (H8) yksikäsitteisyyspuolen nojalla mahdollista ainoastaan, mikäli $A = i(R)$. Koska $A \in t$, niin siis $i(R) \in t$, kuten pitääkin.

Toisensuuntainen inkluusio $i(m) \supset t$ voidaan todistaa edellisen avulla. Olkoon nimittäin edelleen $R \in m$. Nyt $i(P) \in t$, $t \parallel \ell$ ja m on pisteen $i(i(P)) = P$ kautta kulkeva suora siten, että $m \parallel \ell$. Edellisen inkluusion nojalla $i(t) \subset m$. Täten $t = i(i(t)) \subset i(m)$.

Tapaus b): Leikatkoon m suoraa ℓ pisteessä A. Olkoon $P \in m \setminus A$. Koska i on injektio ja $i(A) = A$, niin $i(P) \neq A$, joten $\overleftrightarrow{A\,i(P)}$ on suora. Osoitetaan, että $i(m) = \overleftrightarrow{A\,i(P)}$. Osoitetaan taas ensin inkluusio $i(m) \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$. Olkoon $R \in m$ mielivaltainen. Jos $R = A$, niin $i(R) = A \in \overleftrightarrow{A\,i(P)}$. Voidaan siis olettaa, että $R \neq A$. Olkoot suoran ℓ normaalit pisteiden P, R ja A kautta nimeltään n, r ja a. Lauseen 2.4.16 mukaan n, r ja a ovat yhdensuuntaisia. Olkoon Q suorien n ja ℓ sekä S suorien r ja ℓ leikkauspiste. Tässä on kolme mahdollisuutta: joko i) $P \in a$, ii) RPa tai sitten iii) RaP.



Kuva 169: Peilin leikkaavan suoran peilikuva on suora

Tapaus i): Tässä $n = r = a$ ja $A = Q = S$, joten kuvauksen i määritelmän mukaan $i(R) \in \overleftrightarrow{RS} = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{i(P)Q} = \overleftrightarrow{A\,i(P)}$.

Tapaus ii): Koska $r \parallel a$ ja $n \parallel a$, niin myös SQa ja $i(R)\,i(P)a$. SKS-säännön nojalla on $\triangle PQA \cong \triangle i(P)QA$ ja $\triangle RSA \cong \triangle i(R)SA$. Tällöin, koska nyt $\measuredangle RAS = \measuredangle PAQ$, saadaan $\measuredangle i(P)AQ \cong \measuredangle PAQ = \measuredangle RAS \cong \measuredangle i(R)AS = \measuredangle i(R)AQ$, missä viimeinen yhtälö seuraa siitä, että SQa. Koska RPa, niin $R \in \overrightarrow{AP} \setminus \{A\}$, jolloin myös $RP\ell$. Tällöin peilauksen i määritelmän nojalla $i(R)\,i(P)\ell$. Koska nyt $\measuredangle i(P)AQ \cong \measuredangle i(R)AQ$, niin aksiooman (H11) yksikäsitteisyysosan nojalla on oltava $\overrightarrow{A\,i(P)} = \overrightarrow{A\,i(R)}$. Siten $i(R) \in \overrightarrow{A\,i(P)} \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$.

Tapaus iii): Koska $r \parallel a$ ja $n \parallel a$, niin myös SaQ ja $i(R)A\,i(P)$. Erityisesti siis $S * A * Q$. Valitaan T siten, että $T * A * i(P)$, jolloin lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle SAT \cong \measuredangle i(P)AQ$. Vastaavasti, koska $R * A * P$, niin $\measuredangle RAS \cong \measuredangle PAQ$. Kuten kohdassa ii) on nytkin $\triangle PQA \cong \triangle i(P)QA$ ja $\triangle RSA \cong \triangle i(R)SA$, jolloin saadaan

$$\measuredangle TAS \cong \measuredangle i(P)AQ \cong \measuredangle PAQ \cong \measuredangle RAS \cong \measuredangle i(R)AS.$$

Koska $T * A * i(P)$, niin $T\ell\, i(P)$ ja koska $R * A * P$, niin $R\ell P$. Koska $P\ell\, i(P)$ ja $R\ell\, i(P)$, niin saadaan, että $T\, i(R)\ell$. Tällöin ehdon $\measuredangle TAS \cong \measuredangle i(R)AS$ nojalla on oltava $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{A\,i(R)}$. Koska $T * A * i(P)$, niin $\overrightarrow{AT} \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$, jolloin siis $i(R) \in \overrightarrow{A\,i(R)} = \overrightarrow{AT} \subset \overleftrightarrow{A\,i(P)}$.

Toisensuuntainen inkluusio $i(m) \supset t$ saadaan taas edellisen avulla, sillä $i(\overleftrightarrow{A\,i(P)}) \subset \overleftrightarrow{A\,i(i(P))} = \overleftrightarrow{AP} = m$, joten $\overleftrightarrow{A\,i(P)} = i(i(\overleftrightarrow{A\,i(P)})) \subset i(m)$. □

LAUSE 4.1.2. *Peilaus suoran suhteen säilyttää välissäolon sekä janojen ja kulmien yhtenevyyden. Tarkemmin sanoen:*

(1) *Jos ℓ on suora ja i peilaus ℓ:n suhteen sekä $A*B*C$, niin $i(A)*i(B)*i(C)$.*
(2) *Jos PR on jana, niin $PR \cong i(P)i(R)$,*
(3) *jos vielä $\measuredangle ABC$ on kulma, niin $\measuredangle i(A)i(B)i(C) \cong \measuredangle ABC$.*

Todistus. (2) Osoitetaan ensin, että $PR \cong i(P)\,i(R)$. Jos $\overleftrightarrow{PR} = \ell$, niin $i(P) = P$ ja $i(R) = R$, ja asia on selvä. Olkoon siis $\overleftrightarrow{PR} \neq \ell$. Tässä on kaksi mahdollisuutta; a) $\overleftrightarrow{PR} \parallel \ell$ tai sitten b) $\overleftrightarrow{PQ}$ leikkaa suoraa ℓ.

Tapaus a): Kuten lauseen 4.1.1 todistuksen a) -kohdassa nähdään nytkin, että myös $\overleftrightarrow{i(P)\,i(R)} \parallel \ell$. Lauseen 3.1.2 nojalla $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{i(P)\,i(R)}$. Koska lauseen 2.4.16 nojalla $\overleftrightarrow{P\,i(P)} \parallel \overleftrightarrow{R\,i(R)}$, niin $\square RP\,i(P)\,i(R)$ on suunnikas. Lauseen 3.1.9 nojalla $i(P)\,i(R) \cong PR$.

Tapaus b): Käytetään lauseen 4.1.1 todistuksen b) -kohdan merkintöjä. Huomataan ensin, että jos $P \neq A$, niin $AP \cong A\,i(P)$. Jos $A = Q$, niin tämä seuraa suoraan peilauksen i määritelmästä ja muuten tämä seuraa siitä, että $\triangle PQA \cong \triangle i(P)QA$. Jos nyt toinen pisteistä P tai R on A, niin asia on selvä, sillä $i(A) = A$. Voidaan siis olettaa, että $P, R \neq A$. Tällöin joko i) $R * A * P$, ii) $A * R * P$ tai iii) $A * P * R$.

Tapaus i): Kuten lauseen 4.1.1 todistuksen -kohdassa nähtiin, $i(R) \in \overrightarrow{AT} \setminus \{A\}$, missä $T * A * i(P)$, joten myös $i(R) * A * i(P)$. Koska nyt siis $i(R)A \cong RA$ ja $A\,i(P) \cong AP$, niin väite $i(R)\,i(P) = RP$ seuraa suoraan aksioomasta (H10).

Tapaus ii): Lauseen 4.1.1 todistuksessa nähtiin myös, että $i(R) \in \overrightarrow{A\,i(P)}$. Koska lisäksi $a \parallel \ell$ ja $r \parallel n$, niin on oltava $A*i(R)*i(P)$. Koska nyt siis $A\,i(R) \cong AP$ ja $A\,i(P) \cong AP$, niin väite seuraa kuten kohdassa i), paitsi että aksiooman (H10) sijasta käytetään lausetta 2.4.2.

Tapaus iii): Palataan kohtaan ii) vaihtamalla merkintöjä ($P \leftrightarrow R$).

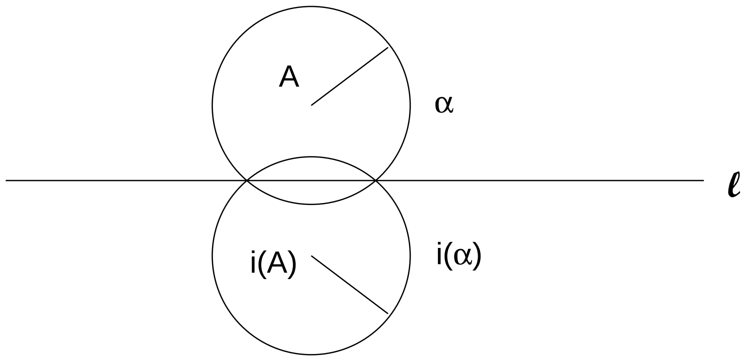
(1) Olkoon $A * B * C$. Tällöin 2.5.4:n nojalla $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Kohdan (2) nojalla pätee tällöin

$$\overline{i(A)\,i(B)} + \overline{i(B)\,i(C)} = \overline{i(A)\,i(C)}.$$

Lauseen 2.5.6 nojalla saadaan heti $i(A) * i(B) * i(C)$.

(3) Olkoon $\measuredangle PQR$ kulma. Tällöin $\triangle PQR$ on kolmio. Lauseen 4.1.1 nojalla $\triangle i(P)i(Q)i(R)$ on myös kolmio ja kohdan (2) sekä SSS-säännön nojalla $\triangle PQR \cong \triangle i(P)i(Q)i(R)$, jolloin $\measuredangle PQR \cong i(P)i(Q)i(R)$. □

LAUSE 4.1.3. *Peilaus suoran suhteen kuvaa ympyrät ympyröiksi. Tarkemmin sanoen, jos ℓ on suora ja i peilaus ℓ:n suhteen sekä α on A-keskinen a-säteinen ympyrä, niin $i(\alpha)$ on $i(A)$-keskinen a-säteinen ympyrä.*



KUVA 170: YMPYRÄN PEILAUS SUORASSA

Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Inversio ympyrän suhteen.

Määritellään seuraavaksi peilaus eli inversio ympyrän suhteen:

Määritelmä 4.2. Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde $a > 0$. Merkitään $X = \{\text{pisteet}\} \setminus \{A\}$ ja määritellään kuvaus $i : X \to X$ seuraavasti: Jos $P \in X$, niin $i(P) \in \overrightarrow{AP}$ s.e.

$$\overline{A\,i(P)} = \frac{a^2}{\overline{AP}}.$$

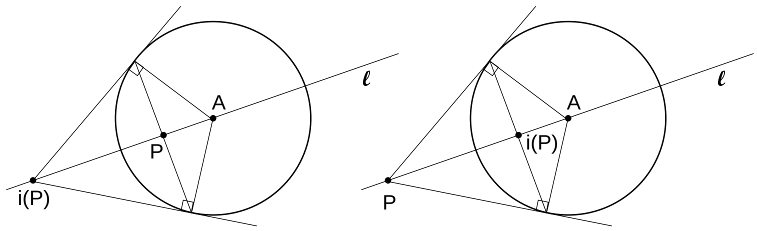
Lauseen 2.6.3 nojalla $i(P)$ on aina olemassa. Lisäksi lauseen 2.5.5. ja aksiooman (H8) nojalla $i(P)$ on yksikäsitteinen. Täten myös $i : X \to X$ on hyvin määritelty kuvaus. Sanotaan, että i on *peilaus eli inversio ympyrän α suhteen.*

Huomautus 37. Suoraan määritelmästä seuraa, että $\overrightarrow{A\,i(P)} = \overrightarrow{AP}$ kaikilla P, joten $\overrightarrow{A\,i(i(P))} = \overrightarrow{A\,i(P)} = \overrightarrow{AP}$ ja

$$\overline{A\,i(i(P))} = \frac{a^2}{\overline{A\,i(P)}} = \frac{a^2}{a^2/\,\overline{AP}} = \overline{AP},$$

joten $i(i(P)) = P$ kaikilla P, joten i on itsensä käänteiskuvaus, $i = i^{-1}$, ja erityisesti i on bijektio $X \to X$.

Huomautus 38. Todistamme myöhemmin, että peilaus tapahtuu kuvan 171 mukaisesti.



Kuva 171: Peilaus ympyrässä toteutettuna Eukleideen tyyliin

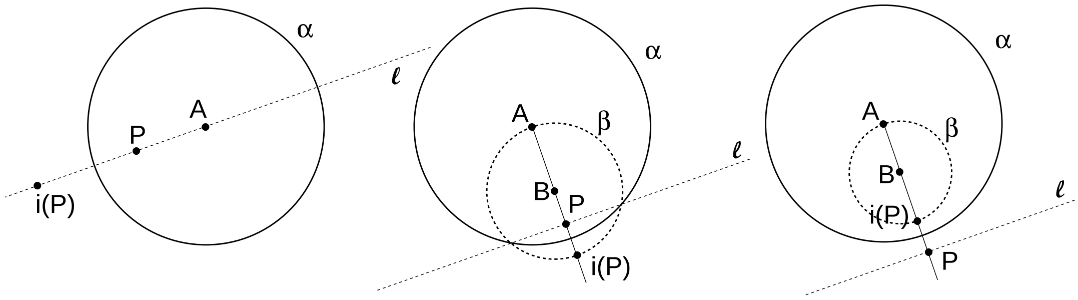
Tämä tieto on auttanut keksimään monet seuraavista lauseista.

LAUSE 4.1.4. *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a sekä i peilaus α:n suhteen. Tällöin $i(\alpha) = \alpha$ ja lisäksi $P \in X$ on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos $i(P)$ on α:n ulkopuolella. Edelleen, jos $A * P * R$, niin $A * i(R) * i(P)$.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 4.1.5. *Olkoon α ympyrä, sen keskipiste A ja a sen säde ja olkoon i peilaus α:n suhteen sekä ℓ suora. Tällöin $i\big(\ell \setminus \{A\}\big)$ on joko itse $\ell \setminus \{A\}$ tai pisteen A kautta kulkeva ympyrä, josta on poistettu piste A, sen mukaan kuuluuko keskipiste A suoralle ℓ vai ei. Tarkemmin:*

(S) *Olkoon ℓ suora, joka kulkee A:n kautta. Tällöin $i(\ell \setminus \{A\}) = \ell \setminus \{A\}$.*

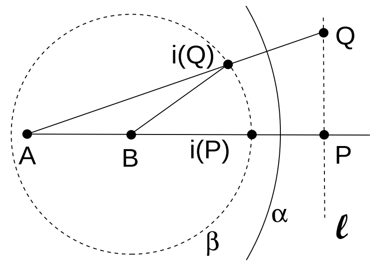
(Y) *Olkoon ℓ suora, joka ei kulje A:n kautta. Olkoon P keskipisteen A kautta kulkevan ℓ:n normaalin ja itsensä ℓ:n leikkauspiste. Tällöin $i(\ell) = \beta \setminus \{A\}$, missä β on ympyrä, jonka keskipiste on $B \in \overrightarrow{AP}$ s.e. $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$ ja säde on $b = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$. Erityisesti $A \in \beta$.*



Kuva 172: Suoran peilaus ympyrän suhteen

Todistus. **(S)**: Jos $P \in \ell \setminus \{A\}$, niin peilauksen i määritelmän mukaan $i(P) \in \overrightarrow{AP} \setminus \{A\} \subset \ell \setminus \{A\}$. Siis $i(\ell \setminus \{A\}) \subset \ell \setminus \{A\}$. Käänteinen inkluusio seuraa tästä, sillä $i(i(P)) = P$ kaikilla P, joten juuri todistetun nojalla saadaan $\ell \setminus \{A\} = i(i(\ell \setminus \{A\})) \subset i(\ell \setminus \{A\})$.

(Y): (1) Todistetaan ensin $i(\ell) \subset \beta \setminus \{A\}$: Muistetaan, että a on ympyrän α säde. Koska aina $i(Q) \neq A$, niin riittää osoittaa, että $i(Q) \in \beta$ mielivaltaiselle $Q \in \ell$ eli että $\overline{i(Q)B} = b$, kun $Q \in \ell$. Jos $Q = P$, niin $A * B * i(Q)$ ja $\overline{B\,i(Q)} = \overline{A\,i(Q)} - \overline{AB} = \overline{A\,i(P)} - \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)} = b$ ja asia on selvä.



KUVA 173: $i(\ell) \subset \beta \setminus \{A\}$

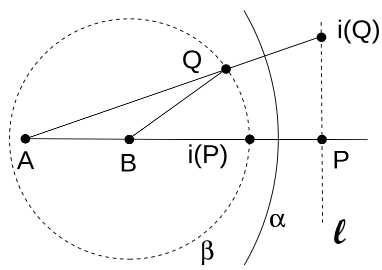
Olkoon siis $Q \neq P$. Koska $B \in \overrightarrow{AP} \setminus \{A\}$ ja $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin $\measuredangle QAP = \measuredangle i(Q)AB$. Koska $\measuredangle APQ$ on suora, pätee tällöin $\cos(\measuredangle i(Q)AB) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$. Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle B\, i(Q)A$ antaa

$$\begin{aligned}
\overline{i(Q)B}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\overline{AB}\;\overline{A\,i(Q)}\cos(\measuredangle i(Q)AB) \\
&= \overline{AB}^2 + \overline{A\,i(Q)}\Big(\overline{A\,i(Q)} - 2\overline{AB}\;\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\Big) \\
&= \overline{AB}^2 + \overline{A\,i(Q)}\Big(\frac{a^2}{\overline{AQ}} - 2\cdot\frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}\;\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\Big) \\
&= \overline{AB}^2 + \frac{\overline{A\,i(Q)}}{\overline{AQ}}\Big(a^2 - \frac{a^2}{\overline{AP}}\cdot\overline{AP}\Big) = \overline{AB}^2.
\end{aligned}$$

Siten $\overline{i(Q)B} = \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)} = b$.

(2) Todistetaan nyt päinvastainen inkluusio $i(\ell) \supset \beta \setminus \{A\}$: Olkoon $Q \in \beta \setminus \{A\}$. Jos $Q \in \overrightarrow{AB}$, niin $Q = i(P)$, sillä kohdan (1) mukaan $i(P) \in \beta \setminus \{A\}$ ja toisaalta $A \in \beta$, koska $\overline{AB} = b$. Nyt lauseen 2.6.1 nojalla suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ ja ympyrällä β ei ole muita leikkauspisteitä kuin A ja $i(P)$. Koska $Q \neq A$, niin on oltava $Q = i(P)$. Siis asia on selvä, jos $Q \in \overrightarrow{AB}$.

Olkoon siis $Q \notin \overrightarrow{AB}$. Tällöin $\triangle QAB$ on kolmio, jolloin kuvauksen i määritelmän nojalla myös $\triangle i(Q)AP$ on kolmio ja $\measuredangle QAB = \measuredangle i(Q)AP$. Merkitään tätä kulmaa $\measuredangle A$.



KUVA 174: $i(\ell) \supset \beta \setminus \{A\}$

Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle QAB$ antaa $\overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AB}\;\overline{AQ}\;\cos\measuredangle A$. Koska $Q \in \beta$, niin $\overline{BQ}^2 = b^2 = \overline{AB}^2$, joten tässä on oltava $\overline{AQ}^2 - 2\overline{AB}\;\overline{AQ}\;\cos\measuredangle A =$

0 ja siis $\overline{AQ} - 2\,\overline{AB}\ \cos\measuredangle A = 0$, ja edelleen $\cos\measuredangle A = \frac{\overline{AQ}}{2\,\overline{AB}}$. Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle i(Q)AP$ antaa

$$\begin{aligned}
\overline{P\,i(Q)}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\ \overline{A\,i(Q)}\cos\measuredangle A \\
&= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\ \frac{a^2}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{2\overline{AB}} \\
&= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - \ \overline{AP}\,a^2\ \frac{1}{\frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}} \\
&= \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - \ 2\,a^2\,\overline{AP}\frac{\overline{AP}}{a^2} \\
(*) \qquad &= \overline{A\,i(Q)}^2 - \overline{AP}^2.
\end{aligned}$$

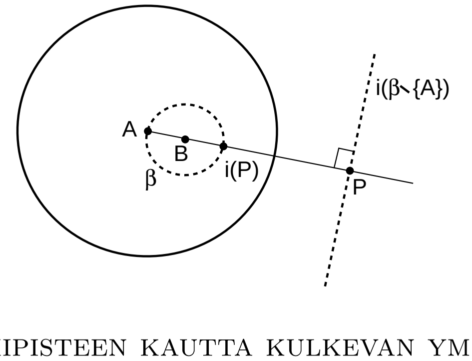
Käytetään uudelleen kosinilausetta kolmioon $i(Q)AP$:

$$\overline{A\,i(Q)}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{P\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\ \overline{P\,i(Q)}\ \cos(\measuredangle AP\,i(Q))$$

ja sijoitetaan tämä kaavaan $(*)$, jolloin $0 = -2\overline{AP}\ \overline{P\,i(Q)}\ \cos(\measuredangle AP\,i(Q))$, joten $\cos(\measuredangle AP\,i(Q)) = 0$. Kosinin määritelmän mukaan näin on ainoastaan silloin, kun $\measuredangle AP\,i(Q)$ on suora kulma. Siten $\overleftrightarrow{P\,i(Q)}$ on $\overleftrightarrow{AP}$:n normaali. Pisteen P määritelmän mukaan myös ℓ on P:n kautta kulkeva suoran $\overleftrightarrow{AP}$ normaali, joten lauseen 2.4.16 nojalla tällöin $\ell = \overleftrightarrow{P\,i(Q)}$ ja siis $i(Q) \in \ell$. Nyt kohdassa (2) on siis todistettu, että $i(Q) \in \ell$ kaikilla $Q \in \beta \setminus \{A\}$. Siten $i(\beta \setminus \{A\}) \subset \ell$, jolloin, koska $i(i(Q)) = Q$ kaikilla Q, niin $\beta \setminus \{A\} = i(i(\beta \setminus \{A\})) \subset i(\ell)$. $\square$

LAUSE 4.1.6. *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a ja i peilaus α:n suhteen. Tällöin i kuvaa A:n kautta kulkevan ympyrän suoraksi. Tarkemmin: Olkoon β ympyrä, B sen keskipiste, b sen säde siten, että $A \in \beta$. Tällöin $i(\beta \setminus \{A\})$ on suoran $\overleftrightarrow{AB}$ normaali, joka kulkee pisteen P kautta, missä $P \in \overleftrightarrow{AB}$ siten, että*

$$\overline{AP} = \frac{a^2}{2b}.$$



Kuva 175: Keskipisteen kautta kulkevan ympyrän inversio

Todistus. Koska $A \in \beta$, niin $A \neq B$, joten $\overleftrightarrow{AB}$ on määritelty. Valitaan P kuten väitteessä ja olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva $\overleftrightarrow{AB}$:n normaali. Pitää osoittaa, että $i(\beta \setminus \{A\}) = \ell$.

Nyt ℓ ei kulje A:n kautta ja $\overleftrightarrow{AP}$ on ℓ:n normaali, joten lauseen 4.1.5 nojalla $i(\ell) = \gamma \setminus \{A\}$, missä γ on ympyrä, jonka keskipiste on $C \in \overrightarrow{AP}$ siten, että $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$ ja säde on $c = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)}$. Nyt

$$\overline{A\,i(P)} = \frac{a^2}{\overline{AP}} = \frac{a^2}{a^2\ /\ 2b} = 2b,$$

joten $\overline{AC} = \frac{1}{2}2b = b$. Toisaalta myös $B \in \overrightarrow{AP}$ ja koska $A \in \beta$, niin $\overline{AP} = b$. Siten aksiooman (H8) nojalla $C = B$. Lisäksi $c = \frac{1}{2}\overline{A\,i(P)} = b$, joten $\gamma = \beta$. Näin on nähty, että $i(\ell) = \beta \setminus \{A\}$, joten $i(\beta \setminus \{A\}) = i(i(\ell)) = \ell$. $\square$

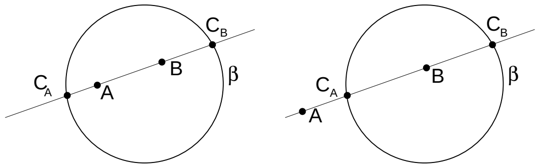
Huomautus 39. Seuraavassa tarkastelemme usein suoraa, joka leikkaa ympyrää. Käytämme seuraavaa merkintäsopimusta.

Jos $A \neq B$ ovat pisteitä ympyrän β sisäpuolella, niin lauseen 2.6.6 nojalla suora $\overleftrightarrow{AB}$ leikkaa ympyrää γ kahdessa eri pisteessä C_1 ja C_2, joille pätee $C_1 * A * C_2$ ja $C_1 * B * C_2$. Tällöin pätee jompikumpi seuraavista

(1) $C_1 * A * B$ ja $A * B * C_2$, tai
(2) $C_2 * A * B$ ja $A * B * C_1$.

Merkitään seuraavassa C_A:lla sitä pistettä C_j, jolle pätee $C_A * A * B$ ja C_B:llä sitä pistettä C_j, jolle pätee $A * B * C_B$.

Jos A on β:n ulkopuolella ja B sisäpuolella, niin toisella C_j:llä on $A * C_j * B$ ja toisella $A * B * C_j$. Tässä tilanteessa merkitään C_A:lla sitä C_j:tä, jolla pätee $A * C_A * B$ ja C_B:llä sitä C_j:tä, jolla pätee $A * B * C_B$.



Kuva 176: Suoran ja ympyrän leikkauspisteiden nimet

LAUSE 4.1.7. *Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a ja i peilaus α:n suhteen. Olkoon β ympyrä, keskipiste B, säde b siten, että $A \notin \beta$. Tällöin $i(\beta)$ on ympyrä. Tarkemmin:*

1° *Jos $A = B$, niin $i(\beta)$ on ympyrä, jonka keskipiste on A ja säde on a^2/b.*
2° *Jos A on β:n sisäpuolella ja $A \neq B$, niin $i(\beta)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $P \in \overrightarrow{AC_A}$ siten, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big)$ ja säde on $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big)$.*
3° *Jos A on β:n ulkopuolella, niin $i(\beta)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $P \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big)$ ja säde on $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big)$.*

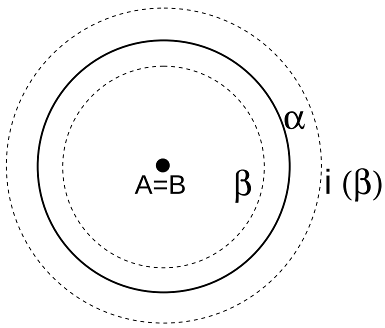
Huomautus 40. Janojen pituuksiksi ehdotetut erotukset ovat positiivisia ja väitteet siis siltä osin järkeviä, sillä tapauksessa 2° on $C_A * A * B$ ja $A * B * C_B$ ja siis, koska B on ympyrän β keskipiste, niin $\overline{AC_A} < \overline{C_A B} = b = \overline{BC_B} < \overline{AC_B}$, jolloin

$$\overline{A\,i(C_A)} = \frac{a^2}{\overline{AC_A}} > \frac{a^2}{\overline{AC_B}} = \overline{A\,i(C_B)},$$

joten $\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)} > 0$. Vastaavasti tapauksessa 3° on $A * C_A * B$ ja $A * B * C_B$, joten tässäkin $\overline{AC_A} < \overline{AB} < \overline{AC_B}$, ja siis $\overline{A\,i(C_A)} > \overline{A\,i(C_B)}$, jolloin $\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)} > 0$.

Lauseen 4.1.7 todistus.

Tapaus 1°: Tässä on oletettu, että $A = B$. On osoitettava, että $i(\beta) = \gamma$, missä γ on A-keskinen ja a^2/b-säteinen ympyrä.

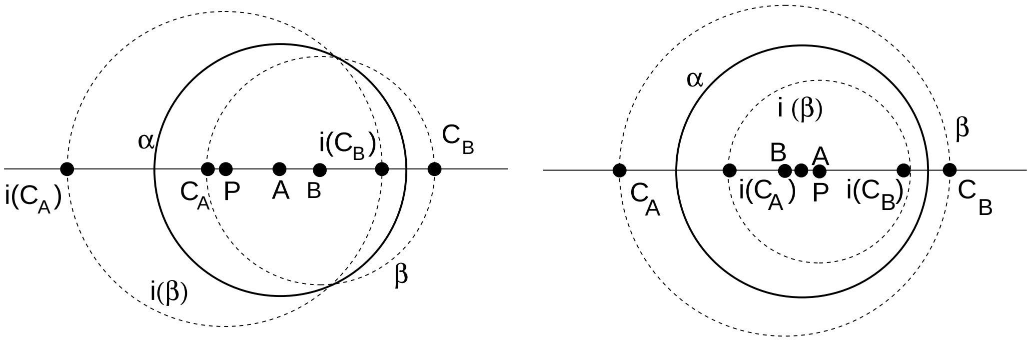


Kuva 177: Samakeskisen ympyrän inversio

Jos $P \in \beta$, niin $\overline{AP} = \overline{BP} = b$, ja siten kuvauksen i määritelmän mukaan $\overline{A\,i(P)} = a^2/b$, joten $i(P) \in \gamma$. Siten $i(\beta) \subset \gamma$.

Vastaavasti, jos $P \in \gamma$, niin $\overline{A\,i(P)} = a^2/\big(a^2\ /\ b\big) = b$, joten $i(P) \in \beta$. Siten $i(\gamma) \subset \beta$, jolloin $\gamma = i(i(\gamma)) < i(\beta)$. Näin $i(\beta) \supset \gamma$. Siis $i(\beta) = \gamma$.

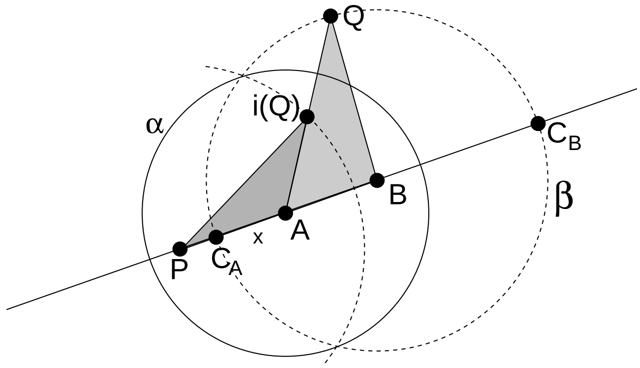
Tapaus 2°: Olkoon nyt A kuvattavan ympyrän β sisäpuolella mutta $A \neq B$. Olkoon $P \in \overline{AC_A}$ siten, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big)$ ja $c = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big)$ sekä γ P-keskinen, c-säteinen ympyrä. Pitää osoittaa, että $i(\beta) = \gamma$.



Kuva 178: Ympyrän inversio, kun A on β:n sisäpuolella

Osoitetaan ensin, että $i(\beta) \subset \gamma$: Olkoon $Q \in \beta$. On osoitettava, että $i(Q) \in \gamma$. Käsitellään ensin erikoistapaukset: Jos $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, niin joko $Q = C_A$ tai $Q = C_B$. Päätellään, että kummassakin tapauksessa on $i(Q) \in \gamma$: Olkoon ensin $Q = C_B$. Koska γ:n keskipiste P on puolisuoralla $\overrightarrow{AC_A}$ ja $C_A * A * C_B$, niin $P * A * C_B$, jolloin myös $P * A * i(C_B)$, sillä $i(Q) \in \overrightarrow{AQ}$ kaikilla Q. Tällöin $\overline{P\,i(C_B)} = \overline{PA} + \overline{A\,i(C_B)} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big) + \overline{A\,i(C_B)} = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big) = c$ ja siten $i(C_B) = i(Q) \in \gamma$, kuten pitikin. Olkoon sitten $Q = C_A$. Nyt $i(C_A) \in \overrightarrow{AC_A}$ ja koska P:n määritelmän mukaan $P \in \overrightarrow{AC_A}$ ja $\overline{AP} < \overline{A\,i(C_A)}$, niin $i(C_A) * P * A$. Tällöin $\overline{P\,i(C_A)} = \overline{A\,i(C_A)} - \overline{AP} = \overline{A\,i(C_A)} - \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\big) = \frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\big) = c$, ja siten myös $i(C_A) = i(Q) \in \gamma$. Pisteiden C_A ja C_B kuvat ovat siis ympyrällä γ, kuten pitääkin.

Voidaan siis olettaa, että kuvattava piste Q ei ole suoralla $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{C_AC_B}$, vaan $\triangle QAB$ on kolmio. Koska $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ja $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin myös $\triangle PA\,i(Q)$ on tällöin kolmio. Merkitään nyt $x = \overline{AC_A}$. Koska $C_A * B * C_B$, niin $\overline{C_AC_B} = \overline{C_AB} + \overline{BC_B} = 2b$ ja tällöin, koska $C_A * A * C_B$, pätee $\overline{AC_B} = \overline{C_AC_B} - \overline{AC_A} = 2b - x$ ja, koska $C_A * A * B$, niin $\overline{AB} = \overline{C_AB} - \overline{AC_A} = b - x$.



Kuva 179: Kosinilauseen käyttö

Edelleen i:n määritelmän mukaan $\overline{A\,i(C_A)} = \frac{a^2}{\overline{AC_A}} = \frac{a^2}{x}$ ja $\overline{A\,i(C_B)} = \frac{a^2}{2b-x}$, jolloin $\overline{AP} = \frac{1}{2}\big(\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{2b-x}\big)$. Jos merkitään vielä $y = \overline{AQ}$, niin $\overline{A\,i(Q)} = \frac{a^2}{y}$.

Koska $C_A * A * B$ ja $P \in \overrightarrow{AC_A}$, niin $P * A * B$. Koska lisäksi $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin kulmat $\measuredangle i(Q)AP = \measuredangle QAP$ ja $\measuredangle QAB$ ovat toistensa täydennyskulmia. Kosinin määritelmän mukaan tällöin

$$(*) \qquad \cos \measuredangle QAB = -\cos \measuredangle i(Q)AP.$$

Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle QAB$ antaa

$$\overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\,\overline{AB}\;\overline{AQ}\,\cos \measuredangle QAB, \text{eli}$$
$$b^2 = (b-x)^2 + y^2 - 2\,(b-x)\,y \cos \measuredangle QAB,$$

josta saadaan käyttäen tietoa $(*)$

$$\cos \measuredangle i(Q)AP = -\frac{(b-x)^2 + y^2 - b^2}{2\,(b-x)\,y} = \frac{2bx - x^2 - y^2}{2\,(b-x)\,y}.$$

Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle i(Q)AP$ antaa

$$\overline{P\,i(Q)}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\,\overline{AP}\;\overline{A\,i(Q)}\cos\measuredangle i(Q)AP,$$

joten

$$\begin{aligned}
\overline{P\,i(Q)}^2 &= \left(\frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{x}-\frac{a^2}{2b-x}\Big)\right)^2 + \Big(\frac{a^2}{y}\Big)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\,\Big(\frac{a^2}{x}-\frac{a^2}{2b-x}\Big)\cdot\frac{a^2}{y}\cdot\frac{2bx-x^2-y^2}{2(b-x)y}\\
&= a^4\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2b-2x}{x(2b-x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2b-2x}{x(2b-x)}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{x(2b-x)y^2}{2(b-x)y}\right]\\
&= a^4\left[\left(\frac{b-x}{x(2b-x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2(b-x)\,x\,(2b-x)}{x(2b-x)\,y\,2(b-x)\,y} + \frac{2(b-x)y^2}{x(2b-x)y\,2\,(b-x)y}\right]\\
&= a^4\left[\left(\frac{b-x}{x(2b-x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x(2b-x)}\right]\\
&= a^4\,\frac{b^2-2bx+x^2+2bx-x^2}{x^2(2b-x)^2}\\
&= \left[a^2\frac{b}{x(2b-x)}\right]^2.
\end{aligned}$$

Siten

$$\overline{P\,i(Q)} = a^2\cdot\frac{b}{x(2b-x)} = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{x}+\frac{1}{2b-x}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\frac{a^2}{x}+\frac{a^2}{2b-x}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\overline{A\,i(C_A)}+\overline{A\,i(C_B)}\big) = c,$$

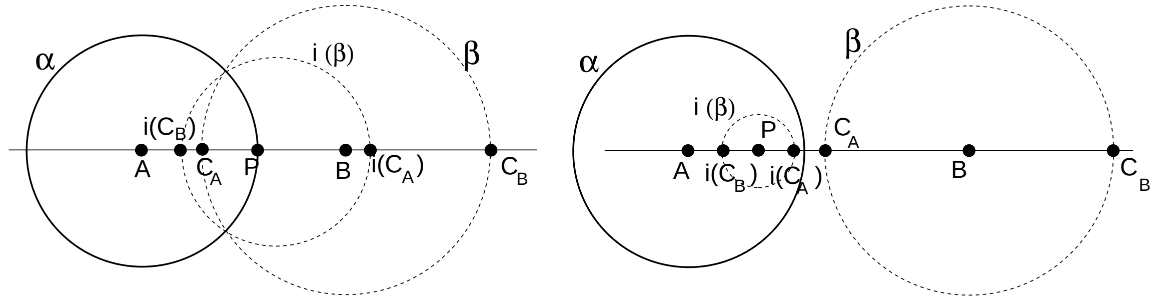
joten $i(Q)\in\gamma$. On siis näytetty, että tapauksessa 2° pätee $i(\beta)\subset\gamma$.

Osoitetaan sitten $i(\beta)\supset\gamma$ eli käänteinen inkluusio. Selvitetään ensin pisteiden $i(C_A)$, P, A ja $i(C_B)$ sijainti suoralla $\overleftrightarrow{AP}$: Koska $\overline{AP}<c$, niin A on γ:n sisäpuolella. Lisäksi $\overleftrightarrow{AP}=\overleftrightarrow{AB}$ ja koska $C_A, C_B\in\overleftrightarrow{AB}$, niin lauseen 4.1.5 mukaan $i(C_A)$, $i(C_B)\in\overleftrightarrow{AP}$. Toisaalta C_A, $C_B\in\beta$, joten juuri edellä todistetun inkluusion nojalla $i(C_A)$, $i(C_B)\in\gamma$. Siten $i(C_A)$ ja $i(C_B)$ ovat suoran $\overleftrightarrow{AP}$ ja γ:n leikkauspisteet. Koska A ja P ovat γ:n sisäpuolella, niin lauseen 2.6.5 nojalla joko $i(C_A)*A*P$ tai $i(C_A)*P*A$. Koska $\overline{Ai(C_A)}=\frac{1}{2}\Big(\overline{A\,i(C_A)}-\overline{A\,i(C_B)}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\overline{A\,i(C_A)}+\overline{A\,i(C_B)}\Big)=\overline{AP}+c>c=\overline{P\,i(C_A)}$, niin on oltava $i(C_A)*P*A$. Tällöin $P*A*i(C_B)$.

Inkluusion $i(\beta)\supset\gamma$ todistamiseksi voidaan nyt **soveltaa jo todistamaamme inkluusiota ympyrään** γ. Tämän mukaan $i(\gamma)\subset\delta$, missä δ on D-keskinen d-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on sellainen $D\in\overrightarrow{A\,i(C_B)}$, että $\overline{AD}=\frac{1}{2}\big(\overline{A\,i(i(C_B))}-\overline{A\,i(i(C_A))}\big)=\frac{1}{2}\big(\overline{AC_B}-\overline{AC_A}\big)$ ja säde $d=\frac{1}{2}\big(\overline{AC_B}+\overline{AC_A}\big)$. Koska C_A*A*B ja $P\in\overrightarrow{AC_A}\setminus\{A\}$, niin $P*A*B$ ja koska $P*A*i(C_B)$, niin $\overrightarrow{A\,i(C_B)}=\overrightarrow{AB}$, jolloin $D\in\overrightarrow{AB}$. Käyttäen toisensuuntaisen inkluusion todistuksen merkintöjä saadaan

$\overline{AB} = b - x = \frac{1}{2}(2b - x - x) = \frac{1}{2}\left(AC_B - \overline{AC_A})\right) = \overline{AD}$, joten aksiooman (H8) nojalla on oltava $B = D$. Lisäksi $d = \frac{1}{2}(2b - x + x) = b$, joten $\delta = \beta$. Siten $i(\gamma) \subset \beta$, jolloin $\gamma = i(i(\gamma)) \subset i(\beta)$. Näin on tapaus 2° kokonaan selvitetty.

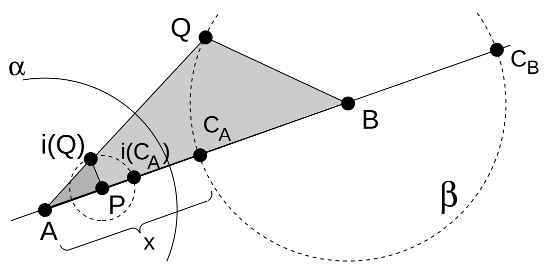
Tapaus 3°: Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa inversioympyrän keskipiste A on kuvattavan ympyrän β ulkopuolella. Nyt osoitetaan, että $i(\beta) = \gamma$, missä γ:n keskipiste on sellainen $P \in \overrightarrow{AB}$, että $\overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\right)$ ja säde $c = \frac{1}{2}(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)})$.



Kuva 180: Ympyrän inversio, kun A on β:n ulkopuolella

Osoitetaan ensin, että $i(\beta) \subset \gamma$. Olkoon $Q \in \beta$. Selvitetään taas ensin erikoistapaus $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, jossa joko $Q = C_A$ tai sitten $Q = C_B$. Katsotaan pisteiden A, $i(C_B)$, P ja $i(C_A)$ järjestys suoralla $\overleftrightarrow{AP}$: Koska $A * C_A * C_B$, niin lauseen 4.1.4 nojalla $A * i(C_B) * i(C_A)$, jolloin $\overline{A\,i(C_B)} < \overline{A\,i(C_A)}$. Koska $i(C_A)$, $i(C_B)$, $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ja $\overline{A\,i(C_B)} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_B)} + \overline{A\,i(C_B)}\right) < \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\right) = \overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_B)}\right) < \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} + \overline{A\,i(C_A)}\right) = \overline{A\,i(C_A)}$, niin on oltava $A * i(C_B) * P$ ja $A * P * i(C_A)$. Jos nyt olisi $Q = C_A$, niin olisi $\overline{P\,i(Q)} = \overline{A\,i(C_A)} - \overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_A)}\right) = c$, joten $Q \in \gamma$. Vastaava päättely saadaan C_B:llekin.

Voidaan siis olettaa, että $Q \neq C_A$, C_B, jolloin $\triangle QAB$ on kolmio. Koska $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ja $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$, niin myös $\triangle PA\,i(Q)$ on tällöin kolmio.



Kuva 182: Kosinilauseen käyttö, kun A on β:n ulkopuolella

Merkitään, kuten edellä, $x = \overline{AC_A}$. Myös nyt käsiteltävässä tilanteessa on $C_A * B * C_B$, joten $\overline{C_AC_B} = 2b$, mutta nyt $A * C_A * C_B$, joten $\overline{AC_B} = \overline{AC_A} + \overline{C_AC_B} = 2b + x$

ja, koska $A * C_A * B$, niin $\overline{AB} = \overline{AC_A} + \overline{C_AB} = b + x$. Edelleen $\overline{A\,i(C_A)} = \frac{a^2}{x}$ ja $\overline{A\,i(C_B)} = \frac{a^2}{2b+x}$, jolloin $\overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{2b+x}\right)$. Jos merkitään vielä $y = \overline{AQ}$, niin $\overline{A\,i(Q)} = \frac{a^2}{y}$.

Koska $i(Q) \in \overrightarrow{AQ} \setminus \{A\}$ ja $P \in \overline{AB} \setminus \{A\}$, niin $\measuredangle QAB = \measuredangle i(Q)AP$, joten myös $\cos(\measuredangle QAB) = \cos(\measuredangle i(Q)AP)$. Kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle QAB$ antaa nyt

$$b^2 = (b+x)^2 + y^2 - 2(b+x)y\cos(\measuredangle QAB),$$

josta saadaan

$$\cos(\measuredangle QAB) = \frac{(b+x)^2 + y^2 - b^2}{2(b+x)y} = \frac{2bx + x^2 + y^2}{2(b+x)y}.$$

Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmioon $\triangle i(Q)AP$ antaa

$$\overline{Pi(Q)}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{A\,i(Q)}^2 - 2\overline{AP}\,\overline{A\,i(Q)}\cos(\measuredangle i(Q)AP),$$

joten

$$\begin{aligned}
\overline{Pi(Q)}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{2b+x}\right)\right)^2 + \left(\frac{a^2}{y}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{2b+x}\right)\cdot\frac{a^2}{y}\cdot\frac{2bx + x^2 + y^2}{2(b+x)y} \\
&= a^4\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2b+2x}{x(2b+x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2b+2x}{x(2b+x)}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{x(2b+x)+y^2}{2(b+x)y}\right] \\
&= a^4\left[\left(\frac{b+x}{x(2b+x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2(b+x)\cdot x(2b+x)}{x(2b+x)\cdot y\cdot 2(b+x)y} - \frac{2(b+x)y^2}{x(2b+x)y2(b+x)y}\right] \\
&= a^4\left[\left(\frac{b+x}{x(2b+x)}\right)^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x(2b+x)}\right] \\
&= a^4\,\frac{b^2 + 2xb + x^2 - 2xb - x^2}{(x(2b+x))^2} = \left(a^2\cdot\frac{b}{x(2b+x)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}
\overline{Pi(Q)} &= a^2\frac{b}{x(2b+x)} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2b+x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{2b+x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{A\,i(C_A)} - \overline{A\,i(C_B)}\right) = c,
\end{aligned}$$

joten $i(Q) \in \gamma$.

Osoitetaan lopuksi, että $\gamma \subset i(\beta)$. Koska nyt $\overline{AP} > c$, niin A on γ:n ulkopuolella. Kuten kohdassa 2° ovat nytkin $i(C_A)$ ja $i(C_B)$ ympyrän γ ja suoran $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AB}$ leikkauspisteet. Koska $C_A, C_B \in \overrightarrow{AB}$, niin $i(C_A)$ ja $i(C_B) \in \overrightarrow{AB}$. Koska lisäksi $A*C_A*C_B$, niin lauseen 4.1.4 mukaan $A*i(C_B)*i(C_A)$. Koska P on γ:n keskipiste, on oltava $i(C_A)*P*i(C_B)$ lauseen 2.6.6 nojalla. Tällöin $A*i(C_B)*P$ ja $A*P*i(C_A)$.

Inkluusion $i(\beta) \supset \gamma$ todistamiseksi voidaan nyt taas soveltaa jo todistamaamme inkluusiota ympyrään γ ja huomataan, että $i(\gamma) \subset \delta$, missä δ on D-keskinen, d-säteinen ympyrä, missä $D \in \overrightarrow{AP}$ s.e. $\overline{AD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AC_B} - \overline{AC_A}\right)$. Tällöin $\overline{AB} = b + x = \frac{1}{2}(2b + x + x) = \frac{1}{2}\left(\overline{AC_B} + \overline{AC_A}\right) = \overline{AD}$ ja, koska $B \in \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$, niin aksiooman (H8) nojalla on oltava $B = D$. Lisäksi $d = \frac{1}{2}(2b + x - x) = b$, joten $\delta = \beta$. Siten $i(\gamma) \subset \beta$, jolloin $\gamma = i(i(\gamma)) \subset i(\beta)$. Kaikenkaikkiaan $\gamma = i(\beta)$. $\square$

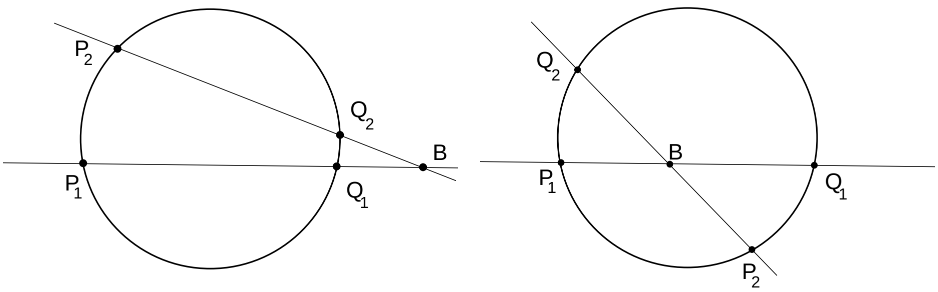
Pisteen potenssi ympyrän suhteen.

Määritelmä 4.3. Olkoon α ympyrä, keskipiste A, säde a. Määritellään *pisteen* $B \notin \alpha \cup \{A\}$ *potenssi ympyrän* α *suhteen*, $P(B, \alpha)$, seuraavasti: jos B on α:n sisäpuolella, niin $P(B, \alpha) = a^2 - \overline{AB}^2$, ja jos B on α:n ulkopuolella, niin $P(B, \alpha) = \overline{AB}^2 - a^2$. Siis aina $P(B, \alpha) > 0$.

Seuraavan lauseen avulla näkee, että potenssilla $P(B, \alpha)$ on se merkillinen ominaisuus, että jos B:n kautta kulkeva suora leikkaa α:aa pisteissä P ja Q, niin aina

$$\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = P(B, \alpha),$$

riippumatta suorasta ℓ.

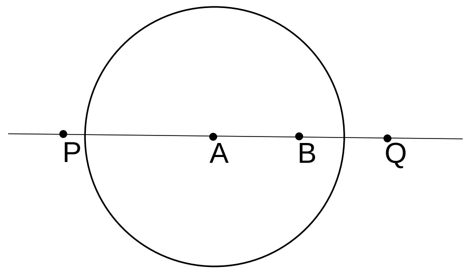


Kuva 184: $P(B, \alpha) = \overline{BP_1} \cdot \overline{BQ_1} = \overline{BP_2} \cdot \overline{BQ_2}$

LAUSE 4.1.8. *Olkoon α A-keskinen a-säteinen ympyrä ja $B \notin \alpha$, $B \neq A$. Olkoon lisäksi ℓ pisteen B kautta kulkeva suora, joka leikkaa α:aa pisteissä P ja Q, $P \neq Q$. Tällöin $\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = P(B, \alpha)$.*

Todistus. Tässä on kaksi tapausta sen mukaan, onko B ympyrän α sisällä (tapaus a) vai ulkopuolella (tapaus b). Kummassakin tapauksessa on taas kaksi eri mahdollisuutta: Suora ℓ voi kulkea (tapaus i) tai olla kulkematta (tapaus ii) keskipisteen A kautta.

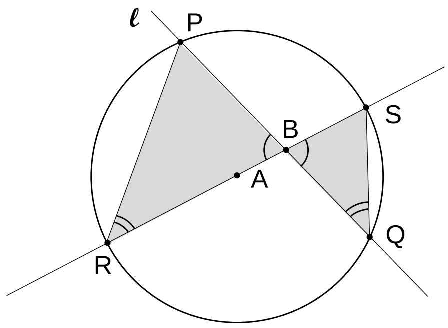
Tapaus ai): Vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä ($P \leftrightarrow Q$) voidaan olettaa, että $P * A * B$ ja $A * B * Q$.



Kuva 185: Tapaus ai)

Tällöin $\overline{BP} = \overline{AB} + \overline{AP} = \overline{AB} + a$ ja $\overline{BQ} = \overline{AQ} - \overline{AB} = a - \overline{AB}$. Siten $\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = (\overline{AB} + a)(a - \overline{AB}) = a^2 - \overline{AB}^2 = P(B, \alpha)$.

Tapaus aii): Lauseen 2.6.6. nojalla $\overleftrightarrow{AB}$ leikkaa α:aa kahdessa eri pisteessä R ja S, olkoot ne nimetty niin, että $R * A * B$ ja $A * B * S$ (ja $R * B * S$).



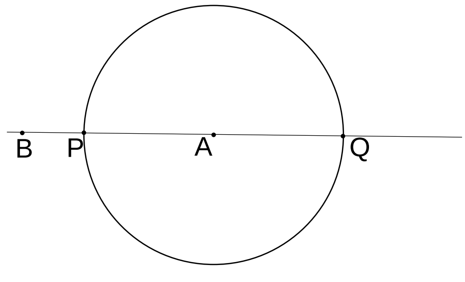
Kuva 186: Tapaus aii)

Koska $P * B * Q$, niin lauseen 2.4.6 nojalla $\measuredangle PBR \cong \measuredangle SBQ$. Lisäksi $QB\overleftrightarrow{PS}$ ja $RB\overleftrightarrow{PS}$, joten $QR\overleftrightarrow{PS}$. Tällöin voidaan soveltaa lausetta 3.1.21, jonka mukaan $\measuredangle PRS \cong \measuredangle PQS$, joten $\measuredangle PRB \cong \measuredangle BQS$. Koska kolmioissa $\triangle PBR$ ja $\triangle BSQ$ kulmasumma on 180, niin pätee myös $\measuredangle RPB \cong \measuredangle BSQ$ ja kolmiot $\triangle PBR$ ja $\triangle SBQ$ ovat siten samanmuotoisia. Lauseen 3.1.10 nojalla tällöin

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{BQ}}.$$

Näin ollen $\overline{PB} \cdot \overline{BQ} = \overline{BR} \cdot \overline{BS}$. Nyt $\overleftrightarrow{BS}$ kulkee A:n kautta, joten kohdan ai) mukaan $\overline{BR} \cdot \overline{BS} = P(B, \alpha)$.

Tapaus bi):

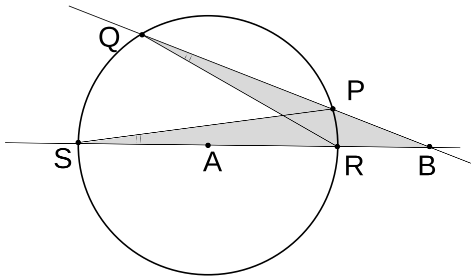


Kuva 187: Tapaus bi)

Tässä $B * P * Q$ tai $B * Q * P$, ja vaihtamalla tarvittaessa merkintöjä ($P \leftrightarrow Q$) voidaan olettaa, että $B * P * Q$. Koska $P * A * Q$, niin $B * P * A$ ja $B * A * Q$. Tällöin $\overline{BP} = \overline{BA} - \overline{PA} = \overline{BA} - a$ ja $\overline{BQ} = \overline{BA} - \overline{AQ} = \overline{BA} + a$. Siten

$$\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = (\overline{AB} - a) \cdot (\overline{BA} + a) = \overline{AB}^2 - a^2 = P(B, \alpha).$$

Tapaus bii):



Kuva 188: Tapaus bii)

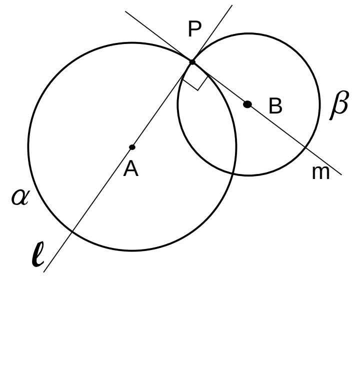
Tässä voidaan taas olettaa, että $B * P * Q$. Suora $\overleftrightarrow{BA}$ leikkaa lauseen 2.6.6 mukaan α:aa pisteissä R, S siten, että $R*A*S$. Voidaan olettaa, että $B*R*A$, jolloin $B*R*S$. Tällöin $S\overleftrightarrow{PR}B$. Koska $B * P * Q$, niin $B\overleftrightarrow{PR}Q$ ja (H7):n nojalla $QS\overleftrightarrow{PR}$. Tällöin 3.1.21:n mukaan $\measuredangle PSR \cong \measuredangle PQR$ ja siten $\measuredangle PSB \cong \measuredangle BQR$. Koska kolmioissa $\triangle BQR$ ja $\triangle BPS$ on kulma $\measuredangle B$ yhteinen ja kulmasumma 180, on myös $\measuredangle BQR \cong \measuredangle BPS$. Siten $\triangle BQR \sim \triangle BPS$. Tällöin lauseen 3.1.10 nojalla

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}},$$

josta saadaan $\overline{PB} \cdot \overline{BQ} = \overline{BR} \cdot \overline{BS}$. Kohdan bi) nojalla $\overline{BR} \cdot \overline{BS} = P(B, \alpha)$ tässä viimeisessäkin tapauksessa. $\square$

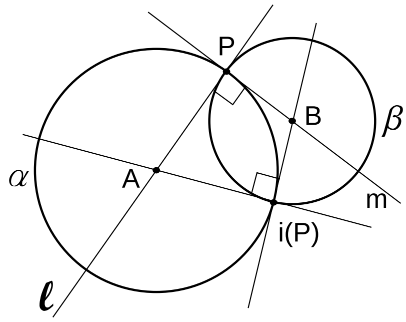
Ortogonaalisista ympyröistä.

Määritelmä 4.4. Kaksi ympyrää α ja β (keskipisteet A ja B, säteet a ja b) ovat *ortogonaalisia*, jos ne leikkaavat toisiaan joissakin pisteissä P ja Q ja niiden tangentit pisteessä P ovat toistensa normaalit ja myös tangentit toisessa leikkauspisteessä Q ovat toistensa normaalit.



Kuva 189: Ortogonaaliset ympyrät

LAUSE 4.1.9. *Olkoot α ja β kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä P ja Q. Olkoon α:n keskipiste A ja β:n keskipiste B. Tällöin α ja β ovat ortogonaalisia, jos ja vain jos P:n kautta kulkeva α:n tangentti kulkee B:n kautta.*
Todistus. "$\Rightarrow$": Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva β:n tangentti ja m pisteen P kautta kulkeva α:n tangentti. Oletuksen nojalla $\ell \perp m$. Lauseen 2.6.8 mukaan $\overleftrightarrow{AP} \perp m$. Tällöin lauseen 2.4.16 mukaan $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$ ja väite seuraa.
"$\Leftarrow$":



Kuva 190: Ortogonaalisuusehto

Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva ympyrän β tangentti. Lauseen 2.6.8 mukaan $\ell \perp \overleftrightarrow{BP}$, jolloin saadaan, käyttäen lausetta 2.6.8 toiseen suuntaan, että $\overleftrightarrow{BP}$ on ympyrän α tangentti, ja siis P:n kautta kulkevat tangentit ovat toistensa normaaleja. Pitää vielä osoittaa toisen leikkauspisteen Q olemassaolo ja Q:n kautta kulkevien tangenttien kohtisuoruus. Koska $\overleftrightarrow{BP} \perp \overleftrightarrow{AP}$, niin $A \neq B$ ja $P \notin \overleftrightarrow{AP}$. Olkoon i peilaus suoran $\overleftrightarrow{AB}$ suhteen, jolloin $i(P) \neq P$. Lauseen 4.1.2 nojalla $BP \cong i(B)i(P)$ ja silloin $\overline{BP} = \overline{B\,i(P)}$, joten $i(P) \in \beta$. Vastaavasti päätellään, että $i(P) \in \alpha$. Siten $i(P) \neq P$ on haettu α:n ja β:n toinen leikkauspiste. Koska $\measuredangle BPA$ on suora kulma, niin 4.1.2:n nojalla myös $\measuredangle i(B)i(P)i(A) = \measuredangle B\,i(P)A$ on suora kulma. Lauseen 2.6.8 mukaan tällöin $\overleftrightarrow{B\,i(P)}$ on α:n tangentti ja $\overleftrightarrow{A\,i(P)}$ on β:n tangentti ja väite seuraa. $\square$

LAUSE 4.1.10. *Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä, keskipisteinään A ja B. Tällöin A on on β:n ulkopuolella ja B on on α:n ulkopuolella.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. $\square$

LAUSE 4.1.11. *Olkoot α ja β ympyröitä, keskipisteinään A ja B ja säteinä a ja b. Tällöin α ja β ovat ortogonaalisia ympyröitä, jos ja vain jos B on on α:n ulkopuolella ja*

$$b^2 = P(B, \alpha),$$

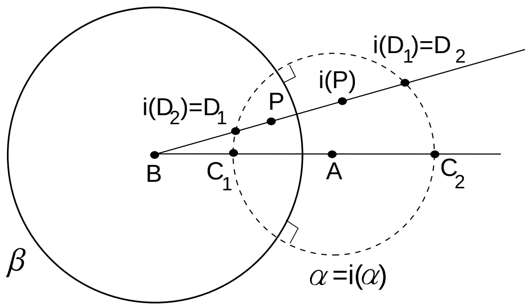
missä $P(B, \alpha)$ on pisteen B potenssi ympyrän α suhteen.
Todistus. "$\Rightarrow$": Lauseen 4.1.10 nojalla B on ympyrän α ulkopuolella. Olkoon P ympyröiden α ja β leikkauspiste. Ortogonaalisuuden nojalla $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BP}$, joten kulma $\measuredangle APB$ on suora. Koska $P \in \alpha$, niin $\overline{AP} = a$ ja vastaavasti $\overline{BP} = b$.

Pythagoraan lause antaa $\overline{AB}^2 - b^2 = a^2$, joten $b^2 = \overline{AB}^2 - a^2 = P(B, \alpha)$.
"$\Leftarrow$": Koska B on ympyrän α ulkopuolella, niin $P(B,\alpha) = \overline{AB}^2 - a^2$ ja siten $\overline{AB}^2 - b^2 = a^2$. Nyt ei voi olla $\overline{AB} - b \geq a$, sillä jos näin olisi, niin olisi myös $\overline{AB} + b > a$ ja siten $\overline{AB}^2 - b^2 = (\overline{AB} - b)(\overline{AB} + b) > a^2$. Siis on oltava $\overline{AB} - b < a$. Vastaavasti päätellään, että $\overline{AB} + b > a$. Koska $b^2 = \overline{AB}^2 - a^2 < \overline{AB}^2$, niin $b < \overline{AB}$. Näin ollen voidaan valita S siten, että $A * S * B$ ja $\overline{BS} = b$. Valitaan lisäksi piste T siten, että $A * B * T$ ja $\overline{BT} = b$. Tällöin S ja T ovat ympyrällä β ja A, S, B, T samalla suoralla tässä järjestyksessä. Lisäksi $\overline{AS} = \overline{AB} - b < a$, joten S on α:n sisäpuolella ja $\overline{AT} = \overline{AB} + b > a$, joten T on α:n ulkopuolella. Tällöin lauseen 2.6.12 nojalla ympyrät α ja β leikkavat toisensa. Olkoon P niiden yhteinen piste. P ei voi olla suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, sillä S ja T ovat tällä suoralla ja lisäksi ympyrällä β, mutta kumpikaan näistä ei ole ympyrällä α eikä lauseen 2.6.11 mukaan muita suoran $\overleftrightarrow{AB}$ ja ympyrän α yhteisiä pisteitä ole olemassa. Siten $\triangle APB$ on kolmio. Kosinilauseen nojalla

$$\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PA} \cdot \overline{PB} \cos \measuredangle P.$$

Nyt $\overline{PA} = a$ ja $\overline{PB} = b$, joten $\cos \measuredangle P = \frac{1}{ab}\left(a^2 + b^2 - \overline{AB}^2\right) = 0$, koska $\overline{AB}^2 - b^2 = a^2$. Siten kosinin määritelmän mukaan $\measuredangle P$ on suora. Tällöin $\overleftrightarrow{AP}$ on β:n tangentti ja kulkee A:n kautta, joten α ja β ovat ortogonaalisia lauseen 3.1.2b nojalla. □

LAUSE 4.1.12. *Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä keskipisteinään A ja B ja säteinä a ja b. Olkoon i* **peilaus β:n suhteen.** *Tällöin $i(\alpha) = \alpha$. Lisäksi piste P on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos myös sen kuva $i(P)$ on α:n sisäpuolella.*



Kuva 191: Lause 4.1.12

Todistus. Olkoot A ja B sekä a ja b ympyröiden α ja β keskipisteet ja säteet. Peilauksen määritelmän mukaan, kun $P \neq B$, niin $i(P) \in \overrightarrow{BP}$ ja $\overline{B\,i(P)} = \frac{b^2}{\overline{BP}}$. Lauseen 4.1.10 mukaan B on α:n ulkopuolella, joten $\overrightarrow{BA}$ leikkaa α:aa kahdessa pisteessä C_1 ja C_2 siten, että $B * C_1 * C_2$ (lause 2.6.2). Lauseen 4.1.7 kohdan 3° mukaan $i(\alpha)$ on ympyrä, jonka keskipiste P kuuluu puolisuoralle $\overrightarrow{BA}$ ja jolla $\overline{BP} = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\right)$, ja säde s on $\frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_2)} - \overline{B\,i(C_1)}\right)$. Koska $B * C_1 * A$, niin $\overline{BC_1} = \overline{BA} - a$, joten $\overline{B\,i(C_1)} = \frac{b^2}{\overline{BA} - a}$ ja koska $B * A * C_2$, niin $\overline{BC_2} = \overline{BA} + a$, ja $\overline{B\,i(C_2)} = \frac{b^2}{\overline{BA}+a}$. Siten

$$\overline{BP} = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\overline{BA}-a} + \frac{b^2}{\overline{BA}+a}\right) = \frac{b^2\,\overline{BA}}{\overline{BA}^2 - a^2} = \frac{b^2\,\overline{BA}}{P(B,\alpha)} = \overline{BA},$$

missä viimeinen yhtälö seuraa ympyröiden α ja β ortogonaalisuudesta ja lauseesta 4.1.11. Koska $P \in \overrightarrow{BA}$, niin on siis $P = A$.

Vastaava lasku antaa $s = b^2/P(B,\alpha) = a$, joten $i(\alpha) = \alpha$.

Todistetaan sitten väitteen jälkimmäinen osa, jonka mukaan P on α:n sisäpuolella, jos ja vain jos $i(P)$ on α:n sisäpuolella.

1°: Oletetaan ensin, että P on α:n sisäpuolella. Tällöin $\overrightarrow{BP}$ leikkaa ympyrää α kahdessa pisteessä D_1 ja D_2, joille $B * D_1 * D_2$. Lauseen 4.1.4 nojalla $B * D_1 * P$ ja $B * i(D_2) * i(D_1)$ sekä $B * i(P) * i(D_1)$ ja vielä $B * i(D_2) * i(P)$, mistä voidaan päätellä, että $i(D_2) * i(P) * i(D_1)$. Nyt lauseen alkuosan nojalla $i(D_1)$, $i(D_2) \in \alpha$, joten $i(P)$ on α sisäpuolella.

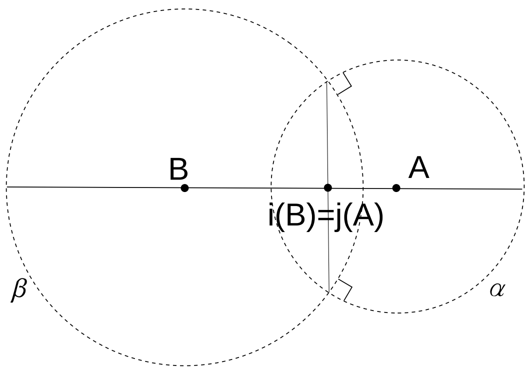
2°: Olkoon seuraavaksi $i(P)$ ympyrän α sisäpuolella. Tällöin on kohdan 1° nojalla myös $P = i(i(P))$ ympyrän α:n sisäpuolella. □

Lauseelle 4.1.12 pätee myös käänteinen tulos, jonka mukaan α ja β ovat ortogonaalisia ainoastaan silloin, kun $i(\alpha) = \alpha$. Itse asiassa pätee vielä voimakkaampi

LAUSE 4.1.13. *Olkoot α ja β ympyröitä ja i peilaus β:n suhteen. Tällöin α ja β ovat ortogonaalisia mikäli on olemassa edes yksi piste $P \in \alpha \setminus \beta$, jolle $i(P) \in \alpha$.*

*Todistus.*Olkoot ympyröiden α ja β keskipisteet A ja B ja säteet a ja b. Koska $P \notin \beta$, niin $i(P) \neq P$. Koska $i(P) \in \overrightarrow{BP}$, niin $B * P * i(P)$ tai $B * i(P) * P$. Lauseen 2.6.6. nojalla kummassakin tapauksessa B on α:n ulkopuolella. Tällöin lauseen 4.1.11 nojalla riittää osoittaa, että $b^2 = P(B,\alpha)$. Koska $P \neq i(P) \in \alpha$, niin lauseen 4.1.8 nojalla $P(B,\alpha) = \overline{BP} \cdot \overline{B\,i(P)}$. Inversiokuvauksen i määritelmän mukaan $\overline{B\,i(P)} = \frac{b^2}{\overline{BP}}$, joten saadaan $P(B,\alpha) = \overline{BP} \cdot \frac{b^2}{\overline{BP}} = b^2$, kuten pitääkin. □

LAUSE 4.1.14. *Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä, keskipisteet A ja B, sekä i peilaus α:n ja j peilaus β:n suhteen. Tällöin $i(B) = j(A)$.*



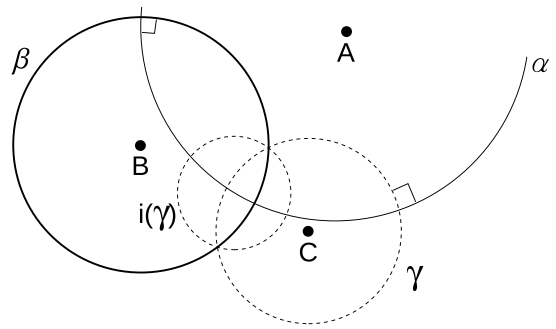
Kuva 192: Keskipisteiden peilikuva

Todistus. Olkoot α:n ja β:n säteet a ja b. Lauseen 4.1.10 mukaan A on β:n ulkopuolella ja B α:n ulkopuolella, eli $\overline{AB} > a$ ja $\overline{AB} > b$. Koska $i(B) \in \overrightarrow{AB}$

ja $\overline{A\,i(B)} = \frac{a^2}{\overline{AB}} < \frac{a^2}{a} = a < \overline{AB}$, niin $i(B) \in AB \subset \overrightarrow{BA}$. Koska myös $j(A) \in \overrightarrow{BA}$, niin riittää osoittaa, että $\overline{B\,i(B)} = \overline{Bj(A)}$. Koska $i(B) \in AB$, niin $\overline{B\,i(B)} = \overline{AB} - \overline{Ai(B)} = \overline{AB} - \frac{a^2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AB}}\left(\overline{AB}^2 - a^2\right) = \frac{1}{\overline{AB}}P(B,\alpha)$. Lauseen 4.1.11 ja α:n ja β:n ortogonaalisuuden nojalla $P(B,\alpha) = b^2$, joten $\overline{B\,i(B)} = \frac{b^2}{\overline{AB}}$. Toisaalta j:n määritelmän mukaan $\overline{Bj(A)} = \frac{b^2}{\overline{BA}}$, joten $\overline{B\,i(B)} = \overline{Bj(A)}$. □

Todistetaan vielä yksi seuraavassa luvussa tarvittava[23] tulos, joka koskee ortogonaalisuuden säilymistä inversioissa:

LAUSE 4.1.15. *Olkoot β ja γ ympyröitä, jotka molemmat ovat ortogonaalisia jotakin kolmatta ympyrää α kohtaan. Oletetaan lisäksi, että γ ei kulje β:n keskipisteen kautta.* **Olkoon i peilaus β:n suhteen.** *Tällöin myös $i(\gamma)$ on ympyrä, joka on α:a vastaan ortogonaalinen.*



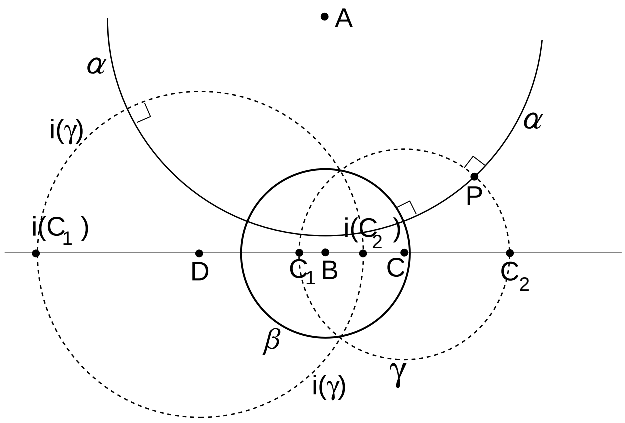
KUVA 193: $i(\gamma) \perp \alpha$

Todistus. Olkoot A, B ja C ympyröiden α, β ja γ keskipisteet ja a, b ja c niiden säteet vastaavassa järjestyksessä. Koska $B \notin \gamma$, niin on kaksi mahdollisuutta: a) B on γ:n sisäpuolella tai sitten b) B on γ:n ulkopuolella.

Tapaus a): Jos B on γ:n sisäpuolella niin voi olla $B = C$, jolloin oletuksen ja lauseen 4.1.11 nojalla $b^2 = P(B,\alpha) = c^2$, joten $b = c$ ja siten $\beta = \gamma$ ja väite pätee triviaalisti, sillä $i(\beta) = \beta$.

Voidaan siis olettaa, että $B \neq C$. Olkoot C_1 ja C_2 suoran $\overleftrightarrow{BC}$ ja ympyrän γ leikkauspisteet siten, että $C_1 * B * C$ ja $B * C * C_2$ (Ks. lause 2.6.6 ja kuva 194).

[23](Euklidisilla) ortogonaalisilla ympyröillä ja inversiolla on huomattavaa merkitystä epäeuklidisessa geometriassa, koska Poincarén mallin käsittely perustuu niihin.



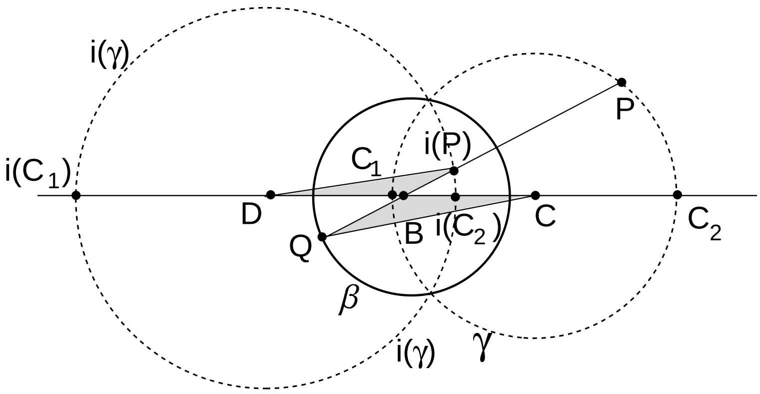
Kuva 194: Tässä B on γ:n sisäpuolella

Lauseen 4.1.7 kohdan 2° mukaan $i(\gamma)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $D \in \overrightarrow{BC_1}$ siten, että $\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} - \overline{B\,i(C_2)}\right)$ ja säde on $d = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\right)$.

Tavoitteena on osoittaa, että $i(\gamma)$:n ja α:n tangentit niiden leikkauskohdassa ovat toistensa normaaleja, eli että $i(\gamma)$:n tangentti tuossa pisteessä kulkee keskipisteen A kautta, kun tiedetään, että vastaava pätee γ:n ja α:n tangenteille niiden leikkauskohdassa $P \in \alpha \cap \gamma$. Ideana on huomio, että $i(\alpha) = \alpha$, joten $i(P) \in \alpha \cap i(\gamma)$. Osoittautuu, että on tarpeellista tietää, että piste $P \in \alpha \cap \gamma$ voidaan valita siten, että $P \neq C_1, C_2$. Aloitamme todistamalla tämän. Antiteesi: P:n valinta ei onnistu. Koska α ja γ leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä, niin tämä on mahdollista vain, jos nämä pisteet ovat juuri C_1 ja C_2. Jos ℓ_1 on C_1:n kautta kulkeva $\overleftrightarrow{CC_1}$:n normaali, niin ℓ_1 on γ:n tangentti ja kulkee lauseen 4.1.9 mukaan A:n kautta. Vastaavasti, jos ℓ_2 on C_2:n kautta kulkeva $\overleftrightarrow{CC_2}$:n normaali, niin myös ℓ_2 on γ:n tangentti ja kulkee sekin lauseen 4.1.9 mukaan A:n kautta. Koska $C_1 \neq C_2$, niin ℓ_1 ja ℓ_2 ovat saman suoran eri normaaleina yhdensuuntaiset, eivätkä voi leikata A:ssa. Antiteesi on väärä eli piste $P \in \alpha \cap \gamma$ voidaan valita siten, että $P \neq C_1, C_2$.

Seuraavaksi osoitetaan toinen aputulos: $P \neq i(P)$. Koska i on inversio ympyrässä β, niin tälle riittää, että $P \notin \beta$. Tehdään antiteesi: $P \in \beta$. Olkoon ℓ pisteen P kautta kulkeva β:n tangentti ja m P:n kautta kulkeva γ:n tangentti. Koska sekä β että γ ovat ortogonaalisia α:n kanssa, niin lauseen 4.1.9 nojalla sekä ℓ että m kulkevat A:n kautta. Koska $P \in \alpha$, niin $P \neq A$, jolloin $\ell = \overleftrightarrow{PA} = m$. Nyt $\overleftrightarrow{BP} \perp \ell$ ja $\overleftrightarrow{CP} \perp m$, joten $\overleftrightarrow{BP}$ ja $\overleftrightarrow{CP}$ ovat saman suoran $\ell = m$ pisteen P kautta kulkevia normaaleja ja siten samoja eli $\overleftrightarrow{BP} = \overleftrightarrow{CP}$. Siten $P \in \overleftrightarrow{BC}$. Koska $P \in \gamma$ ja C_1 ja C_2 ovat $\overleftrightarrow{BC}$:n ja γ:n ainoat leikkauspisteet, on oltava joko $P = C_1$ tai $P = C_2$, mikä on vastoin P:n valintaa. Siis $P \notin \beta$ ja erityisesti $i(P) \neq P$.

Piste P on valittu joukosta $\alpha \cap \gamma$, joten triviaalisti $i(P) \in i(\gamma)$ ja lauseen 4.1.12 nojalla $i(P) \in \alpha$. Siten $i(P)$ on ympyröiden α ja $i(\gamma)$ leikkauspiste, joten 4.1.9:n nojalla riittää osoittaa, että $i(P)$:n kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti kulkee A:n kautta. Koska B on γ:n sisällä ja $P \in \gamma$, niin $\overleftrightarrow{BP}$ leikkaa γ:aa myös jossakin pisteessä Q, jolle pätee $Q * B * P$. (Lause 2.6.6.)



Kuva 195: $\triangle DB\,i(P) \cong \triangle CBQ$

Todistuksen seuraavana vaiheena osoitetaan, että kolmiot $\triangle DB\,i(P)$ ja $\triangle CBQ$ ovat samanmuotoiset. Pisteen C_1:n valinnan nojalla $C_1 * B * C$ ja koska $D \in \overrightarrow{BC_1} \setminus \{B\}$, niin $D * B * C$. Koska $i(P) \in \overrightarrow{BP}$ ja $Q * B * P$, niin $i(P) * B * Q$. Koska $P \neq C_1, C_2$, niin $P \notin \overleftrightarrow{BC}$, jolloin $\measuredangle DB\,i(P)$ on kulma. Tällöin ristikulmalauseen 2.4.6 mukaan $\measuredangle DB\,i(P) \cong \measuredangle CBQ$. Koska $C_1 * B * C$, ja $B * C * C_2$, niin $\overline{BC_1} = \overline{C_1C} - \overline{BC} = c - \overline{BC}$ ja $\overline{BC_2} = \overline{BC} + \overline{CC_2} = \overline{BC} + c$. Siten $\overline{BC_2} - \overline{BC_1} = 2\overline{BC}$ ja $\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} - \overline{B\,i(C_2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\overline{BC_1}} - \frac{b^2}{\overline{BC_2}}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{\overline{BC_2}-\overline{BC_1}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{2\overline{BC}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}}\right)$. Toisaalta lauseen 4.1.8 nojalla $\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2} = P(B,\gamma) = \overline{BQ}\cdot\overline{BP}$. Tällöin $\overline{BD} = \frac{b^2}{2}\frac{2\overline{BC}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}} = \frac{b^2}{2}\frac{2\overline{BC}}{\overline{BQ}\cdot\overline{BP}}$. Tässä $\frac{b^2}{\overline{BP}} = \overline{B\,i(P)}$, joten saadaan $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}\,\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}}$ ja edelleen

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}}.$$

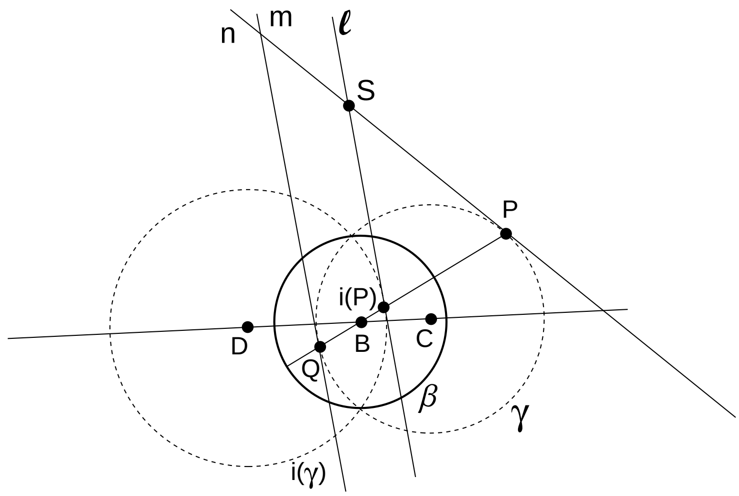
Merkitään tätä suhdetta luvulla k. Nyt ehdon $\measuredangle DB\,i(P) \cong \measuredangle CBQ$ ja kosinilauseen nojalla

$$\begin{aligned}\overline{Di(P)}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{B\,i(P)}^2 + \overline{BD}\cdot\overline{B\,i(P)}\cos\measuredangle DB\,i(P)\\ &= k^2\overline{BC}^2 + k^2\overline{BQ}^2 + k\overline{BC}\cdot k\overline{BQ}\cos\measuredangle CBQ\\ &= k^2\overline{CQ}^2\end{aligned}$$

ja siten myös $\frac{\overline{Di(P)}}{\overline{CQ}} = k$. Tällöin lauseen 3.1.12 nojalla $\triangle DB\,i(P) \sim \triangle CBQ$.

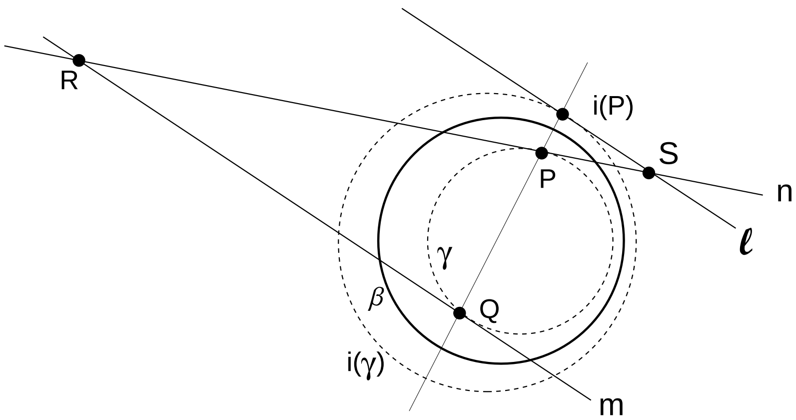
Erityisesti siis $\measuredangle i(P)DB \cong \measuredangle QCB$. Koska $D*B*C$, niin $\measuredangle i(P)DB \cong \measuredangle i(P)DC$ ja $\measuredangle QCB \cong \measuredangle QCD$ ja, koska $i(P) * B * Q$, voidaan soveltaa lausetta 2.4.15, jonka mukaan suorat $\overleftrightarrow{Di(P)}$ ja $\overleftrightarrow{CQ}$ ovat yhdensuuntaisia.

Olkoon nyt ℓ pisteen $i(P)$ kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti. Kuten edellä todettiin, riittää osoittaa, että ℓ kulkee A:n kautta. Olkoon lisäksi m pisteen Q kautta kulkeva ympyrän γ tangentti ja n pisteen P kautta kulkeva γ:n tangentti.



Kuva 196: ℓ kulkee A:n kautta

Koska D on $i(\gamma)$:n keskipiste, niin $\overleftrightarrow{Di(P)} \perp \ell$ ja vastaavasti $\overleftrightarrow{CQ} \perp m$. Koska siis $\overleftrightarrow{Di(P)} \parallel \overleftrightarrow{CQ}$, niin lauseen 3.1.6 nojalla $\ell \parallel m$. Koska $\overleftrightarrow{PQ}$ leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{BC}$ pisteessä $B \neq C$, niin $\overleftrightarrow{PQ}$ ei kulje γ:n keskipisteen C kautta. Tällöin lauseen 3.1.3 nojalla m ja n leikkaavat toisensa jossakin pisteessä R siten, että $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$. Koska $\ell \parallel m$, niin lauseen 3.1.2 nojalla myös ℓ ja m leikkaavat toisensa, olkoon leikkauspiste S. Koska $P \neq i(P) \in \overrightarrow{BP}$, ja $Q * B * P$, niin joko $Q * P * i(P)$ tai $Q * i(P) * P$.

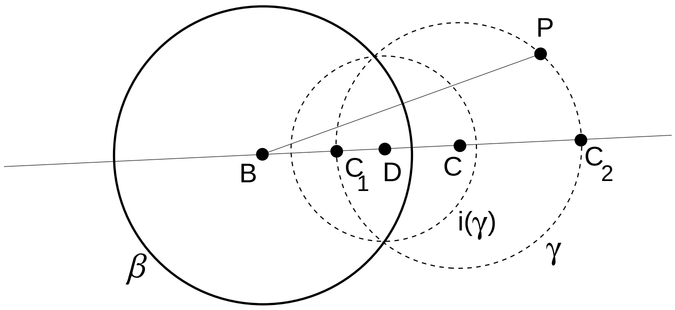


Kuva 197: $\triangle QPR \sim \triangle i(P)PS$

Kummassakin tapauksessa voidaan lauseen 3.1.11 tai sen jälkeisen huomautuksen avulla päätellä, että $\triangle QPR \sim \triangle i(P)PS$. Koska $\measuredangle RPQ \cong \measuredangle RQP$ niin tällöin $\measuredangle S\,i(P)P \cong \measuredangle RQP \cong \measuredangle RPQ \cong \measuredangle SP\,i(P)$, josta edelleen lauseen 2.4.9 b):n nojalla $SP \cong S\,i(P)$. Lauseen 2.6.9 nojalla tällöin S on janan $P\,i(P)$ keskinormaalilla. Koska P, $i(P) \in \alpha$, niin $AP \cong A\,i(P)$ ja lauseen 2.6.9 nojalla myös A on janan $P\,i(P)$ keskinormaalilla. Koska n on γ:n pisteen P kautta kulkeva tangentti, niin lauseen 4.1.9 nojalla n kulkee A:n kautta. Toisaalta S:n valinnan nojalla $S \in n$. Siten pisteet A ja S ovat molemmat sekä n:llä että janan $P\,i(P)$ keskinormaalilla

Koska n kulkee P:n kautta mutta keskinormaali ei, niin nämä ovat eri suoria, ja voivat siis leikata vain yhdessä pisteessä. Siis $A = S$. Koska S:n valinnan nojalla $S \in \ell$, niin $A \in \ell$ ja väite on todistettu tapauksessa a).

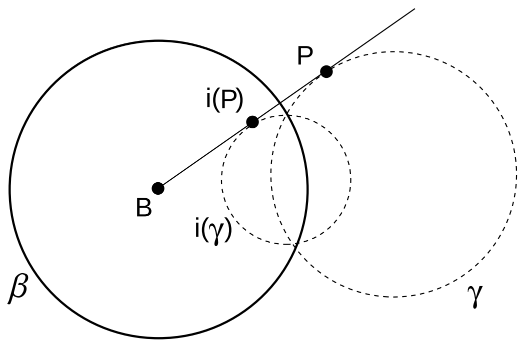
Tapaus b): Olkoon B ympyrän γ ulkopuolella. Lauseen 2.6.6. mukaisesti $\overleftrightarrow{BC}$ leikkaa γ:aa kahdessa pisteessä, olkoot ne C_1 ja C_2, siten, että $B * C_1 * C_2$ ja $C_1 * C * C_2$. Lauseen 4.1.7 kohdan 3° mukaan $i(\gamma)$ on ympyrä, jonka keskipiste on $D \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $\overline{BD} = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\right)$ ja säde on $s = \frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} - \overline{B\,i(C_2)}\right)$.



Kuva 198: Tapaus b)

Kuten tapauksessa a) nähdään nytkin, että voidaan valita piste $P \in \alpha \cap \gamma$ siten, että $P \neq C_1, C_2$, jolloin $P \notin \beta$ ja $i(P) \neq P$ ja riittää osoittaa, että $i(P)$:n kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti kulkee A:n kautta.

Nyt $\overleftrightarrow{BP}$ leikkaa γ:aa ainakin pisteessä P, mutta ei välttämättä muualla, vaan $\overleftrightarrow{BP}$ voi olla γ:n tangentti. Saadaan siis kaksi tapausta: i) $\overleftrightarrow{BP}$ on γ:n tangentti tai ii) $\overleftrightarrow{BP}$ leikkaa γ:aa jossakin toisessa pisteessä Q.

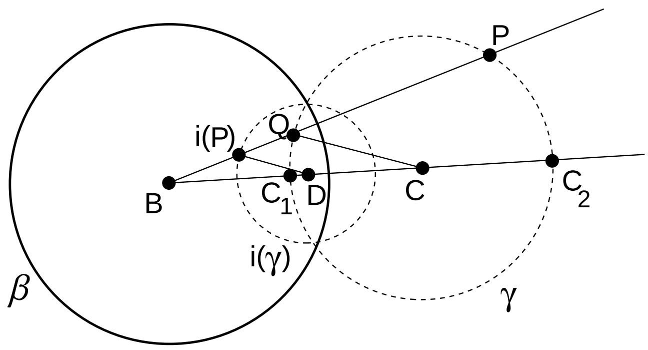


Kuva 199: Tapaus i)

Tapaus i): Jos $\overleftrightarrow{BP}$ on γ:n tangentti, niin $\overleftrightarrow{BP}$ on myös $i(\gamma)$:n tangentti, mikä perustellaan seuraavasti: $i(P)$ on $\overleftrightarrow{BP}$:n ja $i(\gamma)$:n leikkauspiste ja muita leikkauspisteitä ei ole, sillä jos $S \in \overleftrightarrow{BP} \cap i(\gamma)$, niin $S \neq B$, joten $i(S) \in \overleftrightarrow{BP} \cap i(i(\gamma)) = \overleftrightarrow{BP} \cap \gamma$ ja siten $i(S) = P$ ja silloin $S = i(i(S)) = i(P)$.

Koska $P \in \alpha \cap \gamma$, niin $\overleftrightarrow{BP}$ kulkee A:n kautta, koska α ja γ ovat ortogonaalisia (lause 4.1.9). Toisaalta $i(P) \in \alpha \cap i(\gamma)$ (lause 4.1.12), ja $i(\gamma)$:n ja α:n ortogonaalisuus seuraa siis tapauksessa i) lauseesta 4.1.9.

Tapaus ii): Oletetaan nyt, että $\overleftrightarrow{BP} \cap \gamma = \{P, Q\}$, $P \neq Q$.



Kuva 200: Tapaus ii)

Koska B on γ:n ulkopuolella, on joko $B * Q * P$ tai $B * P * Q$. Koska $B * C_1 * C_2$ ja $C_1 * C * C_2$, niin $\overline{BC_2} - \overline{BC_2} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_1C} + \overline{CC_2} = 2\overline{C_1C}$ ja tällöin, koska $B * C_1 * C_2$, niin:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\overline{B\,i(C_1)} + \overline{B\,i(C_2)}\right)}{\overline{BC_1} + \overline{C_1C}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\overline{BC_1}} + \frac{b^2}{\overline{BC_2}}\right)}{\overline{BC_1} + \frac{1}{2}\left(\overline{BC_2} - \overline{BC_1}\right)}$$
$$= b^2 \frac{\frac{1}{\overline{BC_1}} + \frac{1}{\overline{BC_2}}}{\overline{BC_1} + \overline{BC_2}} = \frac{b^2}{\overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}}.$$

Toisaalta $\frac{\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}} = \frac{b^2}{\overline{BQ} \cdot \overline{BP}}$. Lauseen 4.1.8 nojalla $\overline{BQ} \cdot \overline{BP} = \overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}$, joten saadaan

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{b^2}{\overline{BC_1} \cdot \overline{BC_2}} = \frac{b^2}{\overline{BQ} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{B\,i(P)}}{\overline{BQ}}.$$

Nyt $D \in \overrightarrow{BC}$ ja $iP \in \overrightarrow{BQ}$ sekä tapauksessa $B * P * Q$ että tapauksessa $B * Q * P$, joten $\measuredangle DB(i)P = \measuredangle CBQ$. Tällöin, aivan samoin kuin kohdassa a), nähdään, että $\triangle DB(i)P \sim \triangle CBQ$. Täsmälleen samalla päätelyllä kuin kohdassa a) voidaan tästä päätellä, että $i(P)$:n kautta kulkeva $i(\gamma)$:n tangentti kulkee A:n kautta ja väite seuraa. □

4.2. Poincarén malli.

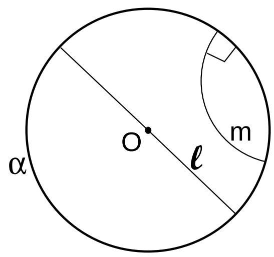
Tässä luvussa esitellään ns. Poincarén[24] malli, joka toteuttaa kaikki muut Hilbertin aksioomat paitsi paralleeliaksiooman. Tällaisen mallin olemassaolo osoittaa, että **paralleeliaksioomaa ei voi todistaa muiden aksioomien avulla**. Samalla malli antaa välineen havainnollistaa seuraavan luvun 3.3 tuloksia eli *hyperbolista geometriaa*, jossa oletetaan paralleeliaksiooman sijasta sen negaatio. Tällöinhän syntyy aivan uudenlaista geometriaa ja tuloksia, jotka tuntuvat ihmeellisiltä — esimerkiksi KKK-sääntö kolmioiden yhtenevyydelle on voimassa.

[24] Jules Henri Poincaré 1854–1912. Ranska.

Tarkastellaan jotakin euklidisen geometrian mallia; tällaisiahan on olemassa, esimerkiksi tavallinen koordinaattigeometria $\mathbb{R}^2$:ssa. Kiinnitetään jokin piste O. Olkoon α O-keskinen 1-säteinen ympyrä. Merkitään

$$\mathcal{A} = \{P \mid P \text{ on } \alpha\text{:n sisäpuolella } \}.$$

Sovitaan, että Poincarén mallin ”pisteet” ovat $\mathcal{A}$:n pisteet. Erotukseksi euklidisista pisteistä kutsutaan näitä tarvittaessa $\mathcal{P}$-pisteiksi. Poincarén mallin suorat eli $\mathcal{P}$-suorat määritellään seuraavasti: ℓ on $\mathcal{P}$-suora, mikäli $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$, missä β on joko O:n kautta kulkeva suora tai α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä. Jos β on suora, kutsutaan vastaavaa $\mathcal{P}$-suoraa $\mathcal{A} \cap \beta$ ensimmäisen tyypin suoraksi, muuten toisen tyypin suoraksi.



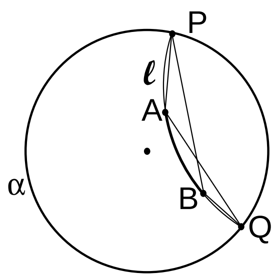
KUVA 201: TYYPPIEN 1 JA 2 SUORAT

Relaatio *piste sisältyy suoraan* määritellään tavallisen joukko-opin mielessä, kuten käyttämässämme euklidisen geometrian mallissa: $P \in \ell$.

Välissäolo ja yhtenevyys aiotaan määritellä ”janan pituuden” käsitteen avulla. Pituuskäsite on ensin määriteltävä malliin sopivasti. Sitä varten otetaan käyttöön ns. hyperbolisen etäisyyden käsite: Olkoon ℓ $\mathcal{P}$-suora. Lauseiden 2.6.2 ja 2.6.12 nojalla ℓ leikkaa α:aa täsmälleen kahdessa $\mathcal{P}$-pisteessä, olkoot ne P ja Q. Olkoot A ja B $\mathcal{P}$-suoran ℓ eri pisteitä. Sanotaan, että luku

$$d(A,B) = \left| \log \frac{\overline{AP}\,\overline{BQ}}{\overline{AQ}\,\overline{BP}} \right| \in \mathbb{R}$$

on A:n ja B:n *hyperbolinen etäisyys.*



KUVA 202: HYPERBOLINEN ETÄISYYS

Huomautus 41. Määritelmä on vähän huonosti asetettu: Onko kahdella $\mathcal{P}$-pisteellä aina hyperbolinen etäisyys, ts. onko olemassa $\mathcal{P}$-suoraa ℓ, joka kulkee niiden kautta, ja toisaalta, onko $d(A, B)$ yksikäsitteinen. Pisteiden P ja Q nimienvaihto ei tietenkään muuta $d(A, B)$:n lukuarvoa, mutta voisiko ehkä olla olemassa kaksi tällaista $\mathcal{P}$-suoraa, jolloin saataisin kokonaan eri pisteet P ja Q ja näistä syntyvät etäisyydet voisivat — ainakin periaatteessa — olla eri lukuja. Nämä ongelmat poistuvat, kun osoitetaan, että (H1) pätee. Tätä ei kuitenkaan tehdä vielä.

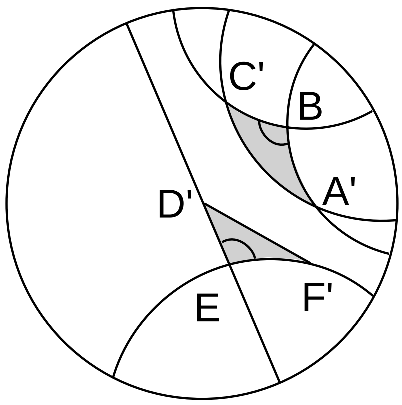
Kun nyt etäisyyskäsite on määritelty, niin voidaan määritellä välissäolo: Olkoot A, B, C eri $\mathcal{P}$-pisteitä. Sanotaan, että B on A:n ja B:n *välissä*, $A * B * C$, mikäli A, B ja C ovat samalla $\mathcal{P}$-suoralla ja

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Janojen yhtenevyys määritellään näin: Janat AB ja CD ovat *yhteneviä*, $AB \cong CD$, mikäli

$$d(A, B) = d(C, D).$$

Kulmien yhtenevyys määritellään SSS-säännön inspiroimina seuraavasti: Kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ ovat *yhtenevät*, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, mikäli seuraava pätee: Jos $A' \in \overrightarrow{BA}$, $C' \in \overrightarrow{BC}$, $F' \in \overrightarrow{EF}$ ja $D' \in \overrightarrow{ED}$ siten, että $BA' \cong ED'$ ja $BC' \cong EF'$, niin $F'D' \cong A'C'$.



KUVA 203: YHTENEVÄT $\mathcal{P}$-KULMAT

Tässä luvussa tullaan siis osoittamaan, että Poincarén mallissa kaikki aksioomat (H1)–(H13) sekä Dedekindin aksiooma pätevät, mutta paralleeliaksiooma ei. Jo tässä vaiheessa on luvassa, että paralleeliaksiooma todellakaan ei päde, ovathan edellisessä kuvassa suorat $\overleftrightarrow{ED'}$ ja $\overleftrightarrow{EF'}$ suoran $\overleftrightarrow{A'C'}$ suuntaisia.

Hilbertin aksioomia käsiteltäessä todistusstrategia on samantapainen kuin osoitettaessa harjoitustehtävänä, että koordinaattigeometria on euklidisen geometrian malli: Siirretään tarkasteltava tilanne "helppoon paikkaan", yleensä origoon, jolloin tutkittavista suorista monet ovat 1. tyyppiä ja niitä on helppo käsitellä. Koordinaattitasomallissa $\mathbb{R}^2$ siirtämiseen käytetään tason siirtoja ja kiertoja. Poincarén mallissa euklidiset siirrot eivät tule kyseeseen, eivät liioin kierrot muiden pisteiden kuin origon ympäri, mutta näitä kuvauksia vastaavat ns. *liikkeet*, jotka määritellään seuraavassa. Taustalla on havainto, että euklidisessakin tapauksessa siirrot ja kierrot voi toteuttaa yhdistelminä peilauksistasuoran suhteen.

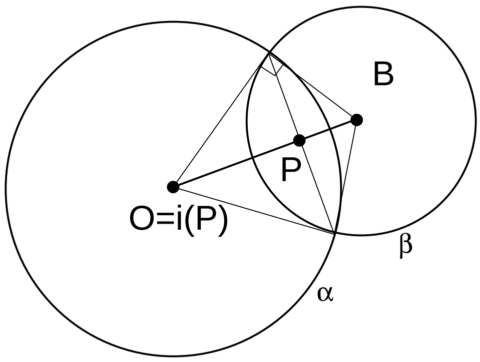
Määritelmä 4.5. *Liike* on peilaus β:n suhteen, missä β on joko O:n kautta kulkeva suora tai α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä.

Huomautus 42. Liike on määritelty jokaisessa $\mathcal{P}$-pisteesä P, sillä ainoa ongelma voisi tulla ortogonaalisen ympyrän β keskipisteessä, mutta lauseen 4.1.10 nojalla tämä on α:n ulkopuolella, eikä siis ole $\mathcal{P}$-piste.

LAUSE 4.2.1. *Olkoon P $\mathcal{P}$-piste ja i liike. Tällöin $i(P)$ on $\mathcal{P}$-piste.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 4.2.2. *Jokainen liike on bijektio $\{\mathcal{P}$-pisteet $\} \to \{\mathcal{P}$-pisteet.$\}$*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

LAUSE 4.2.3. *Olkoon P $\mathcal{P}$-piste. Tällöin on olemassa liike i siten, että $i(P) = O$.*
Todistus. Jos $P = O$, niin asia on selvä, peilaussuoraksi kelpaa mikä tahansa ensimmäisen tyypin suora. Olkoon siis $P \neq O$. On löydettävä peilaus j, joka vie P:n keskipisteeksi O. ehdokkaan löytämiseksi arvioidaan, että mikään 1. tyypin suora ei ainakaan kelpaa ja koetetaan sitten löytää yksinkertainen ehdokas sopivan symmetristä kuviota apuna käyttäen.



Kuva 204: Pisteen P siirto origoon liikkeellä

Kuvasta 204 saa seuraavan idean: Olkoon j peilaus α:n suhteen ja β ympyrä, jonka keskipiste on $B = j(P)$ ja säde

$$b = \sqrt{\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1}.$$

Koska P on 1-säteisen ympyrän α sisäpuolella, niin $\overline{OP} < 1$, joten $\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1 > 0$ ja neliöjuuri on siis hyvin määritelty positiiviluku. Koska P on α:n sisäpuolella, niin $B = j(P)$ on α:n ulkopuolella ja

$$P(B, \alpha) = \overline{OB}^2 - 1^2 = \frac{1}{\overline{OP}^2} - 1 = b^2,$$

jolloin lauseen 4.1.11 mukaan β on α:n kanssa ortogonaalinen. Olkoon i nyt peilaus β:n suhteen. Nyt i on liike ja lisäksi pätee $i(P) = O$, sillä B:n valinnan nojalla

$O * P * B$, joten $i(P) \in \overrightarrow{BO}$ ja

$$\overline{Bi(P)} = \frac{b^2}{\overline{BP}} = \frac{\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1}{\overline{OB} - \overline{OP}} = \frac{\frac{1}{\overline{OP}^2} - 1}{\frac{1}{\overline{OP}} - \overline{OP}} = \frac{1}{\overline{OP}} = \overline{OB}.$$

□

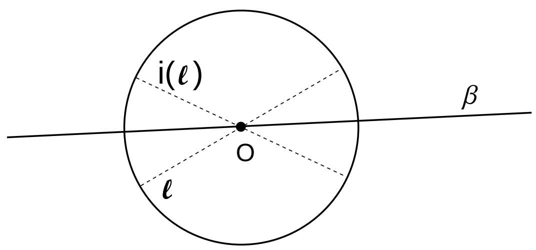
LAUSE 4.2.4. *Pisteen O kautta ei kulje yhtään tyyppiä 2 olevaa suoraa.*
Todistus. Perustelu on sopiva harjoitustehtävä. □

Seuraava lause sanoo, että liikkeet kelpaavat siinä mielessä euklidisen tason kiertojen ja siirtojen korvikkeeksi, että ne kuvaavat Poincarén mallin suorat saman mallin suoriksi.

LAUSE 4.2.5. *Olkoon ℓ $\mathcal{P}$-suora ja i liike. Tällöin $i(\ell)$ on $\mathcal{P}$-suora.*
Todistus. Olkoon i peilaus β:n suhteen, missä β on joko O:n kautta kulkeva suora (tapaus a) tai α:n kanssa ortogonaalinen ympyrä (tapaus b).

Tapaus a) Olkoon β O:n kautta kulkeva suora. Tässä on kaksi alatapausta: joko ℓ on tyyppiä 1 tai tyyppiä 2.

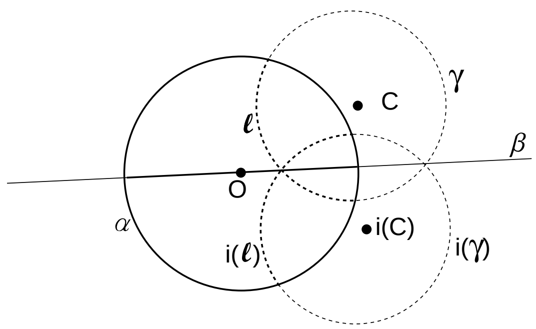
Tapaus a1°) Olkoon ℓ tyyppiä 1.



KUVA 205: β ON EUKLIDINEN SUORA JA ℓ TYYPPIÄ 1

Koska $i(O) = O$, niin lauseiden 4.1.1 ja 4.2.1 nojalla $i(\ell)$ on tyyppiä 1 oleva $\mathcal{P}$-suora.

Tapaus a2°) Oletetaan, että ℓ on tyyppiä 2, ts. $\ell = \mathcal{A} \cap \gamma$, missä γ on ympyrä, joka on ortogonaalinen α:n kanssa.



KUVA 206: β ON EUKLIDINEN SUORA JA ℓ TYYPPIÄ 2