JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 10 / 2009**
D380 keskiviikkoisin 12-14 ja 16-18.

1. Neutraalia geometriaa

1. Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio, jossa $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat suoria kulmia ja $AD \cong BC$. Osoita, että $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. (Ohje: Osoita, että CD:n keskinormaali on myös AB:n keskinormaali.)

2. Todista Pythagoraan lauseelle käänteinen tulos: Jos Pythagoraan lause pätee kaikille suorakulmaisille kolmioille ja kolmiossa $\triangle ABC$ pätee

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2,$$

niin $\measuredangle A$ on suora kulma.

2. Euklidista geometriaa

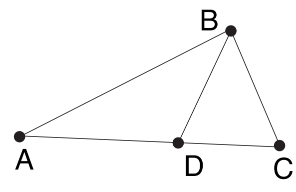
3. Todista Cevan lauseen avulla, että kolmion kulman puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Ohje: vanhat demot!)

4. Kolmion $\triangle ABC$ keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Osoita, että syntyneillä kuudella pikkukolmiolla on sama pinta-ala ja että janat leikkaavat toisensa suhteessa 1:2.

3. Hyperbolista geometriaa

5. Hyperbolinen geometria on mahdollista tulkita ”Riemannin geometriaksi pinnalla, jonka kaarevuus oin vakio -1”. Samoin on pallogeometria ”Riemannin geometriaa pinnalla, jonka kaarevuus on vakio +1”. Siksi geometrioissa on paljon yhteisiä tai täysin vastakkaisia piirteitä. Yksi niistä on, että pallolla (isoympyröiden kaarista muodostetun) kolmion kulmien summa on aina yli 180 astetta. Itse asiassa kulmasumman ylitys eli kolmion *eksessi* $\alpha + \beta + \gamma - 180$ on suoraan verrannollinen pallokolmion pinta-alaan, kun pallon säde on kiinteä, vaikkapa 1. Totea tämä kolmiolle, jossa on kaksi suoraa kulmaa. (Yleinen tulos mv. pallokolmiolle on hieman haastavampi todistettava, mutta ei vaadi erikoistekniikoita!)

Vertailun vuoksi voit muistaa, että hyperbolisessa geometriassa kolmion *defekti* Def($\triangle ABC$) on määritelmän mukaan 180− (kulmien astelukujen summa) ja että pätee defektin additiivisuuslause 2.5.24, jonka mukaan kuvan tilanteessa
Def($\triangle ABC$)=Def($\triangle ABD$)+Def($\triangle DBC$).



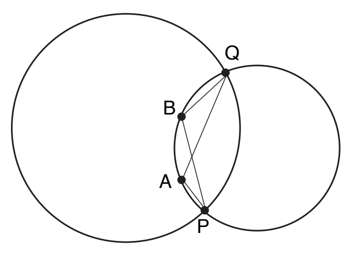
6. Todista ainakin pääpiirteittäin, että Pythagoraan lause ei päde hyperbolisessa geometriassa eli että paralleeliaksiooma seuraa Pythagoraan lauseesta. Sivujen neliöt tulkitaan sivujen pituuksien (lukuja) neliöiksi - geometrisia neliöitähän ei ole hyperbolisessa geometriassa olemassakaan. Vihje: Tarkastele tasakylkistä, suorakulmaista kolmiota ja heijasta se toisen katetin yli, jolloin sat uuden tasakylkisen kolmion. Suorakulkmaisenko? . Huomaa myös käänteinen Pythagoras.

7. a) Osoita, että hyperbolisessa geometriassa ei jokaisella kolmiolla ole ympäripiirrettyä ympyrää. Ohje: Saat käyttää tietoa, että Poincarén mallissa ympyrä on mallin perusjoukkoon sisältyvä euklidinen ympyrä, joskin keskipiste on yleensä eri paikassa.

b) Onko Poincarén mallissa jokaisella hyperbolisella kolmiolla sisään piirrettyä ympyrää? Ohje kuten a)-kohdassa

8. Piirrä Poincarén malliin suorakulmainen kolmio, jonka sivuista yksi / kaksi/ ei yhtään on tyyppiä 1 (eli origon kautta kulkevan suoran osa) ja suora kulma origossa / muualla.

9. Piirrä (tai konstruoi) Poincaré-malliin kaksi yhtä pitkää janaa mahdollisimman ”yleisessä tilanteessa”. Saat käyttää kaikkia keinoja, jopa laskinta ja viivainta, jossa on asteikko. (Hyperbolisen etäisyyden määritelmä Poincarén mallissa eli ympyrän sisäpisteiden joukossa on $d(AB) = \left|\log\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}\right)\right|$.)



10. Todista, että heijastus **origon kautta kulkevassa** suorassa säilyttää Poincarépisteiden etäisyydet. (Tässä tehtävässä heijastus on tavallinen euklidinen. Poincarén mielessä heijastus tuon suoran suhteen olisi kyllä sama asia! Miksihän?)