JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 6 / 2008**
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

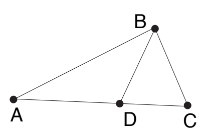
1. Neutraalia ja hyperbolista geometriaa

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H14).

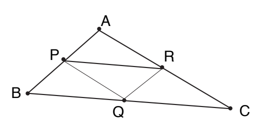
1. Todista janamitan konstruktiossa käytetty laskusääntö $(mn) \cdot RS = m \cdot (n \cdot RS)$ jokaisella janalla RS ja luvuilla $m, n \in \mathbf{N}$.

2. Todista lauseen 2.5.2 todistuksessa käytetty laskusääntö $k \cdot RS < k \cdot TU \iff RS < TU$.

3. Kolmion *defekti* Def($\triangle ABC$) on määritelmän 2.20 mukaan 180−(kulmien astelukujen summa). Defektin additiivisuuslauseen 3.5.24 mukaan kuvan tilanteessa Def($\triangle ABC$)=Def($\triangle ABD$)+Def($\triangle DBC$).



Osoita defektin avulla, että **hyperbolisessa** geometriassa, jossa **jokaisen kolmion defekti on aidosti positiivinen,** tapahtuu seuraavaa: Jos $\triangle ABC$ on kolmio ja



P, Q, R sivujen AB, BC ja CA keskipisteet, niin tällöin jokin yhtälöistä $\overline{PR} = \overline{BQ}$, $\overline{PQ} = \overline{AR}$, $\overline{QR} = \overline{BP}$ on VÄÄRIN.

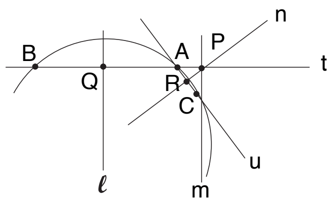
4. Onko olemassa suunnikas? (Sunnikkaan määritelmä 3.1. on hyvä katsoa!)

5. Tarkastele monisteen luvussa I esitettyä Legendren todistusyritystä paralleeliaksioomalle. Siinä on kymmenen perustelematonta kohtaa. Perustele niistä muutama kohta.

6. Etsi virhe seuraavasta paralleeliaksiooman todistusyrityksestä:

Olkoon ℓ suora ja P piste sen ulkopuolella. Olkoon t pisteen P kautta kulkeva ℓ:n normaali. Leikatkoon se ℓ:ää pisteessä Q. Olkoon m pisteen P kautta kulkeva t:n normaali. Tällöin $\ell \parallel m$. Olkoon $n \neq m$ jokin toinen P:n kautta kulkeva suora. Pitää osoittaa, että n ei ole ℓ:n suuntainen, vaan ne leikkaavat. Asia on selvä, jos $n = t$. Olkoon siis $n \neq t$. Valitaan A siten, että $P * A * Q$ ja valitaan B siten, että $A * Q * B$ ja $AQ \cong QB$.

Olkoon u pisteen A kautta kulkeva n:n normaali. Leikatkoon u suoraa n pisteessä R. Valitaan C siten, että $A * R * C$ ja $AR \cong RC$. Tällöin B, A ja C eivät ole samalla suoralla, joten niiden kautta kulkee yksikäsitteisesti määrätty ympyrä, jonka



keskipiste on AB:n ja AC:n keskinormaalien leikkauspiste D. Mutta nytpä ℓ on AB:n ja n on AC:n keskinormaali, joten ℓ ja n leikkaavat pisteessä D. $\square$.

2. Eukleideen geomeriaa

7. a) Annettuna O-keskinen ympyrä α ja sitä pisteessä Q sivuava tangentti t . Hahmottele todistus sille, että t:n kuva inversiossa on ympyrä, jonka halkaisija on jana OQ. (Väitteessä on pieni virhe. Mikä?)

b) a) Annettuna O-keskinen ympyrä α ja sitä pisteissä Q ja R leikkaava suora s. Mikä on t:n kuva inversiossa? Todistus noudattelee aikaisempia ideoita, joten saat sivuuttaa sen, jos osaat sen.

c) Annettuna O-keskinen ympyrä α ja suora s, joka ei kulje keskipisteen kautta. Konstruoi harpilla ja viivoittimella suoran kuva inversiossa. (Miten kävisi, jos suora s kuitenkin kulkisi keskipiseen kautta?)

3. Tiedoksi

Janamitan perusominaisuudet Olkoon OI annettu jana. Tällöin on tasan 1 tapa liittää jokaiseen janaan $AB, \ldots$ reaaliluku $\overline{AB}$ siten, että

(1) $\overline{AB} > 0$.
(2) $\overline{OI} = 1$.
(3) $\overline{AB} = \overline{CD}$, joss $AB \cong CD$.
(4) $\overline{AB} < \overline{CD}$, joss $AB < CD$.
(5) $A * B * C$, joss $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
(6) Jokaista lukua $0 < x$ kohti on olemassa jana AB, jolla $\overline{AB} = x$.

Kulmamitan perusominaisuudet On tasan 1 tapa liittää jokaiseen kulmaan $\measuredangle A, \measuredangle B, \ldots$ reaaliluku $(\measuredangle A)^\circ$ siten, että

(1) $0 < (\measuredangle A)^\circ < 180$
(2) $(\measuredangle A)^\circ = 90$, joss $\measuredangle A$ on suora kulma.
(3) $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.
(4) $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A < \measuredangle B$.
(5) Jos $\overrightarrow{AC}$ on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä, niin $(\measuredangle DAB)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ$
(6) Jokaista lukua $0 < x < 180$ kohti on olemassa kulma $\measuredangle A$, jolla $(\measuredangle A)^\circ = x$.
(7) Jos $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat toistensa täydennyskulmat, niin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$.