JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

GEOMETRIA **Harjoitus 11 / 2008 (Viimeinen. Tentti on 3.12.)**
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

1. Euklidista

1. (SKS-sääntö samanmuotoisuudelle.) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ ja lisäksi $\measuredangle A \cong \measuredangle D$. Osoita, että $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

2. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja D BC:n, E AC:n ja F AB:n keskipisteet. Sanotaan, että janat AD, BE ja CF ovat $\triangle ABC$:n *keskijanat*. Osoitimme viime kerralla Cevan lauseen käänteisen puolen avulla, että keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Osoita tästä riippumatta suoraan tarkastelemalla sopivia samanmuotoisia kolmioita, että kaksi keskijanaa jakavat toisensa suhteessa 2:3. Tästä(kin) seuraa, että kaikki kolme keskijanaa kohtaavat samassa pisteessä. Tämä piste on kolmion *painopiste*.

3. Janan keskinormaali muodostuu niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana kummastakin päätepisteestä. Osoita tämän avulla, että *kolmion (sivujen) keskinormaalit* leikkaavat toisensa samassa pisteessä, jos ollenkaan.

(Kyseinen piste on ”kolmion ympäri piirretyn” eli sen kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän keskipiste. Miksi keskinormaalit euklidisessa geometriassa todella todella leikkaavat toisensa? Keksi Poincarén mallissa kolmio, jolla ei ole olemassakaan ympäripiirreetyä ympyrää. Keksimistä helpottaa tieto, että Poincarén mallissa (hyperboliset) ympyrät ovat mallin sisään mahtuvia euklidisia ympyröitä. Lisätieto, jota ei tässä tarvita: hyperbolinen ja euklidinen keskipiste ovat yleensä eri kohdassa; milloin samassa.)

4. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. *Sivun AB vastainen korkeusjana* on jana CD, missä D on pisteen C kautta kulkevan AB:n normaalin ja suoran $\overleftrightarrow{AB}$ leikkauspiste. Osoita, että kolmion korkeusjanat – tai niiden jatkeet – leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Ohje: piirrä kolmion kärkipisteiden kautta vastakkaisten sivujen suuntaiset suorat.)

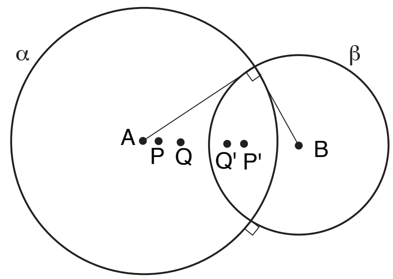
5. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Osoita, että kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Kyseinen piste on ”kolmion sisälle piirretyn”eli sen kaikkia sivuja sisäpuolelta sivuavan ympyrän keskipiste.)

Tätä tehtävää voi käsitellä Cevan lasueen avulla tai ilman sitä .

2. Poincaré

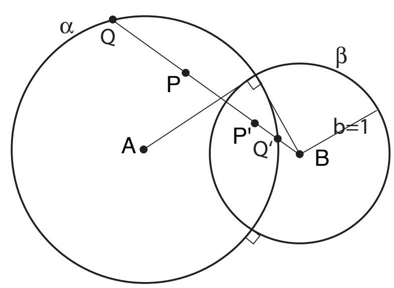
6. Todista että origon kautta ei kulje yhtään tyypin 2 Poincaré-suoraa.

7. Todista suoraan laskemalla, että heijastus Poincaré-suorassa $\ell = A \cap \beta$ säilyttää origosta lähtevällä (kuvassa B-keskistä) inversioympyrää β vastaan (euklidisesti) kohtisuoralla puolisuoralla olevien Poincaré-pisteiden etäisyydet: $d(PQ) = d(P'Q')$.

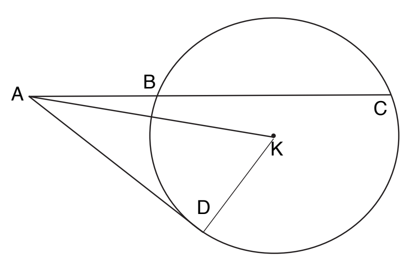


8. Todista lause 4.2.1: "Jos P on P-piste ja i liike, niin $i(P)$ on P-piste."

Näytä siis, että inversio mallin (keskipiste A, tällä kertaa helpointa valita mieliv. säde r) reunaa vasten kohtisuorassa ympyrässä (keskipiste B, tähän säde 1) kuvaa Poincaré- pisteet Poincaré-pisteiksi. Kannattaa mielestäni käyttää suoraan inversion määritelmää ja aloittaa todistamalla että A-ympyrän (kehän) α kuva on se itse, eli kuvassa Q ja Q' ovat toistensa inverssit.



Oleellisena apuna on tehtävä 1 kierrokselta 3: Kuvan tilanteessa $\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,\overline{AC}$ ja kulma ADK on suora kulma.



(Voit lopuksi huomata, että edellisissä tehtävissä on saatu myös lause 4.2.2, jonka mukaan jokainen liike on bijektio $\{P\text{-pisteet}\} \to \{P\text{-pisteet}\}$.)

Harrastustehtäviä asiasta kiinnostuneille

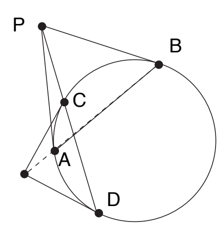
9. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{1}{y}\,ds,$$

missä γ on tasossa $\mathbb{R}^2$ jana pisteestä $(0,1)$ pisteeseen $(0,2)$ eli $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (0, 1+t)$. (Avuksi: $ds = \|\gamma'(t)\|\,dt$.) Laske integraali myös, kun γ on tasossa $\mathbb{R}^2$ x-akselia vastaan ortogonaalisen ympyrän kaari pisteestä $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pisteeseen $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ siten, että $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(\frac{\pi}{4} + t\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{4} + t\frac{\pi}{2}))$. Piirrä kumpikin käyrä γ. Miten ihmeessä tämä mahtaa liittyä tähän kursiin?

10. Hyperbolinen geometria on mahdollista tulkita ”Riemannin geometriaksi pinnalla, jonka kaarevuus oin vakio -1”. Samoin on pallogeometria ”Riemannin geometriaa pinnalla, jonka kaarevuus on vakio +1”. Siksi geometrioissa on paljon yhteisiä tai täysin vastakkaisia piirteitä. Yksi niistä on, että pallolla (isoympyröiden kaarista muodostetun) kolmion kulmien summa on aina yli 180 astetta. Itse asiassa kulmasumman ylitys eli kolmion *eksessi* $\alpha + \beta + \gamma - 180$ on suoraan verrannollinen pallokolmion pinta-alaan, kun pallon säde on kiinteä, vaikkapa 1. Totea tämä kolmiolle, jossa on kaksi suoraa kulmaa ja todista sitten yleinen tulos mv. pallokolmiolle. Tämä palautuu kahdesti suorakulmaiseen tapaukseen, mutta on hieman haastavampi todistettava. Hyperbolisessa geometriassa vastaava tulos on, että kolmion ala on suoraan verrannollinen kulmasumman defektiin, ja siis enintään 180 (sopivassa yksikössä mitattuna).

11. Ratkaise millä keinolla tahansa: Olkoon γ ympyrä ja P sen ulkopuolinen piste, josta ympyrälle piirrettyjen tangenttien sivuamiskohdat olkoot A ja B. Olkoon edelleen s suora, joka kulkee pisteen P kautta ja leikkaa ympyrän kohdissa C ja D. Osoita, että pisteisiin C ja D piirretyt tangentit leikkaavat toisensa suoralla $\overleftrightarrow{AB}$, jos ollenkaan.



(Kilpailu: kenellä elegantein todistusidea.) (Osaatko arvata, päteekö edellinen tulos, kun ympyrä korvataan ellipsillä tai muulla kartioleikkauksella?)

12.) Seuraavat kolme: a) Olkoon $\measuredangle ABC$ suora kulma. Osoita, että B on ympyrällä, jonka halkaisija on AC. (Vrt lause 3.1.23)

b) α ympyrä ja $A, B, C, D, E, F \in \alpha$ siten, että $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ ovat teräviä kulmia. Osoita, että $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$ jos ja vain jos $AC < DF$.

c) (”Käänteinen kehäkulmalause”) Olkoot A, B, C, D eri pisteitä siten, että $CD\overleftrightarrow{AB}$ ja $\measuredangle ACB \cong \measuredangle ADB$. Osoita, että on olemassa ympyrä α siten, että $A, B, C, D \in \alpha$.