GEOMETRIA 2006 **Harjoitus 8**

D380 keskiviikkona klo 8-10, 12-14 ja 16-18.

1. Todista lause 2.6.8: Olkoon $\alpha = \{P \mid \overline{OP} = r\}$ O-keskinen r-säteinen *ympyrä* ja ℓ suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Tällöin ℓ on α:n *tangentti* — toisin sanoen suoralla ℓ ei ole muita α:n pisteitä kuin P — jos ja vain jos ℓ on suoran $\overleftrightarrow{OP}$ normaali. Koskeeko tämä lause pelkästään euklidista geometriaa?

2. Hyperbolinen geometria on mahdollista tulkita "Riemannin geometriaksi pinnalla, jonka kaarevuus oin vakio -1". Samoin on pallogeometria "Riemannin geometriaa pinnalla, jonka kaarevuus on vakio +1". Siksi geometrioissa on paljon yhteisiä tai täysin vastakkaisia piirteitä. Yksi niistä on, että pallolla (isoympyröiden kaarista muodostetun) kolmion kulmien summa on aina yli 180 astetta. Itse asiassa kulmasumman ylitys eli kolmion *eksessi* $\alpha + \beta + \gamma - 180$ on suoraan verrannollinen pallokolmion pinta-alaan, kun pallon säde on kiinteä, vaikkapa 1. Totea tämä kolmiolle, jossa on kaksi suoraa kulmaa. (Yleinen tulos mv. pallokolmiolle on hieman haastavampi todistettava, mutta ei vaadi erikoistekniikoita!)

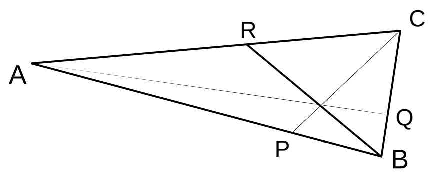
3. Seuraako paralleeliaksiooman voimassaolo yhden suunnikkaan olemassaolosta, kun muut aksioomat oletetaan? (Sunnikkaan määritelmä on hyvä katsoa!)

4. Mieti Poincarén mallin avulla, onko hyperbolisessa geometriassa olemassa kolmio, jonka kulmasumma on 170.

Euklidista geometriaa:.

5. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $A * P * B$, $B * Q * C$, $C * R * A$. Pisteet P, Q, R ovat siis kolmion sivuilla, mutta eivät kärjissä. Oletetaan, että janat AQ, BR ja CP leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Perustele, miksi

$$(*) \qquad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1$$

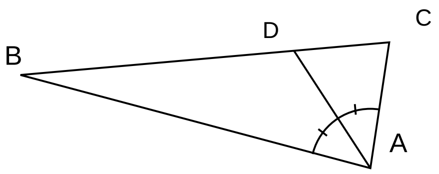


Ohje: Vertaile sopivien kolmioiden pinta-aloja. Viime kerran tehtävien mukaan voit olettaa kolmion pinta-alan lausekkeen tunnetuksi.

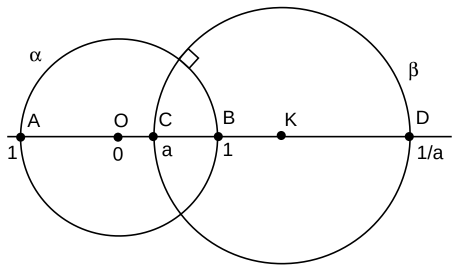
6. (jatkoa) Päteekö käänteinen tulos, siis että jos $\triangle ABC$ on kolmio ja $A * P * B$, $B * Q * C$, $C * R * A$ ja yhtälö $(*)$ on voimassa, niin ko. janat kulkevat saman pisteen kautta.

KÄÄNNÄ

7. Miksi kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, siis kuvan tilanteessa $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$?



8. Tarkastellaan kuvan tilannetta, jossa ympyrät α ja β leikkaavat toisiaan suorakulmaisesti. Perustele, miksi Cja D ovat toistensa kuvat inversiossa ympyrän α suhteen.



Yl puolella pisteen nimi, alapuolella pisteen et isyys pisteest O

9. (jatkoa) Vastaavasti A ja B ovat tietenkin toistensa inverssit β:n suhteen. Osoita, että kaksoissuhde $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 1$, eli $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ eli pisteet C ja D jakavat janan AB samassa suhteessa — toinen sisäpulitse ja toinen ulkopuolitse. Huomaa, että samalla A ja B jakavat janan CD keskenään samassa suhteessa — toinen sisäpuolitse ja toinen ulkopuolitse. Tässä tilanteessa sanotaan, että pisteet A, B, C, jaD muodostavat *harmonisen nelikön.* (Vihje: helppo!)