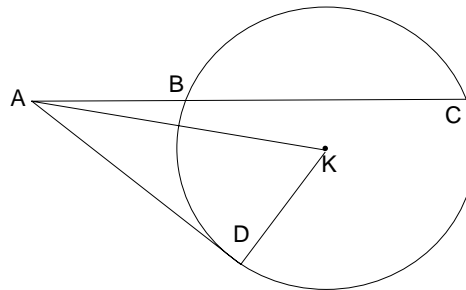


Eukleideen geometrian harjoittelua.

1. Konstruoi harpilla ja viivaimella kahden toisiaan sivuavan annetun ympyrän kaikki yhteiset tangentit.
2. Osoita Pythagoraan lausetta käyttäen, että kuvan tilanteessa $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \overline{AC}$. Huomaa, että kulma ADK on suora kulma.



Aksioomien ristiriidattomuus ja riippumattomuus.

Tarkastellaan seuraavia aikaisemmasta poikkeavia ”uusgeometrisia” aksioomia, joissa peruskäsitteitä ovat *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta*.

- (A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa ainakin yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
- (A2) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa korkeintaan yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
- (A3) Jos l ja m ovat eri suoria, niin on olemassa ainakin yksi piste P , jonka kautta sekä l että m kulkevat.
- (A4) On olemassa ainakin yksi suora.
- (A5) Jokainen suora kulkee ainakin kolmen eri pisteen kautta.
- (A6) Jos l on suora, niin on olemassa ainakin yksi piste, jonka kautta l ei kulje.
- (A7) Jokainen suora kulkee korkeintaan kolmen eri pisteen kautta.

3. Osoita, että edellisestä listasta valitsemasi aksioomaa (A_i) on riippumaton muista aksioomista muodostamalla malli, joka toteuttaa kaikki muut aksioomat (A1)–(A7) mutta ei aksioomaa (A_i).

4. Kuten edellinen, mutta eri tehtävä (saat tehdä useampiakin)

5. Osoita, että ylläoleva aksioomajärjestelmä on ristiriidaton konstruoimalla malli joka toteuttaa kaikki aksioomat (A1)–(A7).

6. Todista että ”geometriassa”, joka toteuttaa aksioomat (A1)–(A7), on olemassa ainakin seitsemän pistettä. Bonuskysymys: Voiko niitä olla enemmänkin?

KÄÄNNÄ!

Välissäoloa.

7. Konstruoi viiden pisteen suora — siis viisi pistettä sisältävä malli Hilbertin insidenssiaksiomille (H1)-(H2) (Huom:(H3) puuttuu) — ja määrittele sitten suorallasi ”välissäolo” niin, että aksiomat (H4)–(H6) toteutuvat.
8. Osoita, että Hilbertin aksiomista (H1)–(H7) seuraa, että pisteitä on ääretön määrä. (Vihje: induktio, lause 2.3.4 tai 2.3.7). Mahtaisiko todistaminen onnistua ilman aksiomaa (H7)?

Eukleideen geometrian pohdintaa.

9. Perustele jollakin tavalla, että kaksi kertaa isommalla kuviolla on nelinkertainen pinta-ala. Entä $\sqrt{2}$ -kertaisella?
10. Laske π :lle likiarvo säännöllisen n -kulmion avulla. Saat valita n :n itse. Voit laskea alan tai kehän. Voit esittää ylä- tai alalikiarvon tai molemmat.