D380 keskiviikkona klo 8-10, 12-14 ja 16-18.

Kokeet (UUSI JÄRJESTELY).

(1) 29.11. 2. välikoe
(2) 19.12. tarjolla loppukoe, 1. välikoe ja 2. välikoe.

Opetus.

(1) 22.11. Nämä harjoitukset
(2) 27.11. Viimeinen luento ennen välikoetta
(3) 29.11. Välikokeen lisäksi kuitenkin luento / tietokonedemo.

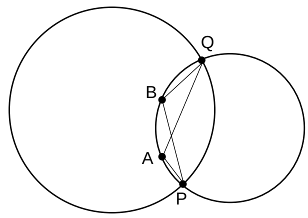
Tehtävät.

Muista, että ympyrän kuva inversiossa on ympyrä (tai suora)

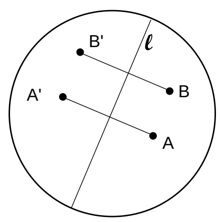
1. Olkoot α ja β ortogonaalisia ympyröitä, keskipisteinään A ja B. Todista, että A on on β:n ulkopuolella ja B on on α:n ulkopuolella.

2. Piirrä Poincaré-malliin suorakulmainen kolmio, jonka sivuista yksi / kaksi/ ei yhtään on tyyppiä 1 (eli origon kautta kulkevan suoran osa) ja suora kulma origossa / muualla.

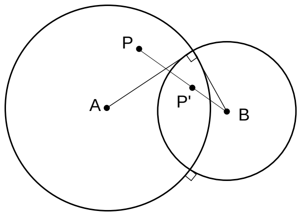
3. Piirrä (tai konstruoi) Poincaré-malliin kaksi yhtä pitkää janaa mahdollisimman "yleisessä tilanteessa". Saat käyttää kaikkia keinoja, jopa laskintaa ja viivainta, jossa on asteikko. (Hyperbolisen etäisyyden määritelmä Poincarén mallissa eli ympyrän sisäpisteiden joukossa on $d(AB) = \left|\log\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}\right)\right|$.)



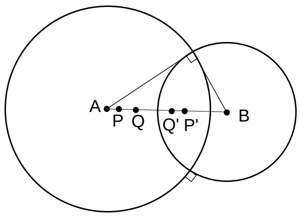
4. Todista, että heijastus origon kautta kulkevassa suorassa säilyttää Poincaré-pisteiden etäisyydet. (Tässä tehtävässä heijastus on tavallinen euklidinen. Poincarén mielessä heijastus tuon suoran suhteen olisi kyllä sama asia! Miksihän?)



5. Todista lause 4.2.1, joka sanoo että heijastus P-suorassa eli inversio mallin (keskipiste A, tällä kertaa helpointa valita mieliv. säde r) reunaa vasten kohtisuorassa ympyrässä (keskipiste B, tähän säde 1) kuvaa Poincaré- pisteet Poincaré-pisteiksi. Huomaat samalla, että A-ympyrän α kuva on se itse.



6. (jatkoa) Todista, että heijastus Poincaré-suorassa $\ell = \mathcal{A} \cap \beta$ säilyttää origosta lähtevällä (kuvassa B-keskistä) inversioympyrää 2 vastaaan (euklidisesti) kohtisuoralla puolisuoralla olevien Poincaré-pisteiden etäisyydet: $d(PQ) = d(P'Q')$.



7. Todista lauseet 4.2.1 ja 4.2.2:

a) Olkoon P $\mathcal{P}$-piste ja i liike. Tällöin $i(P)$ on $\mathcal{P}$-piste.

b) Jokainen liike on bijektio $\{\mathcal{P}\text{-pisteet }\} \to \{\mathcal{P}\text{-pisteet.}\}$

8. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{1}{y}\, ds, \qquad \text{missä}$$

a) γ on tasossa $\mathbb{R}^2$ jana pisteestä $(0,1)$ pisteeseen $(0,2)$ eli

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (0, 1+t).$$

(Avuksi: $ds = \|\gamma'(t)\|\, dt$)

b) γ on tasossa $\mathbb{R}^2$ x-akselia vastaan ortogonaalisen ympyrän kaari pisteestä $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ pisteeseen $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ eli

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(\tfrac{\pi}{4} + t\tfrac{\pi}{2}), \sin(\tfrac{\pi}{4} + t\tfrac{\pi}{2})).$$

Miten ihmeessä tämä mahtaa liittyä tähän kursiin?