GEOMETRIA 2002 **Harjoitus 6 (2 ov. viimeinen)**
D380 keskiviikkoisin 8-10, 12-14 ja 16-18.

° **Toinen tietokoneharjoitusryhmä kokoontuu tiistaina 22.10 klo 16 luokassa MaD 353. Nyt on tilaa, kun käytämme kaksittain samoja koneita, mutta varminta on ilmoittauta luennolla tai ⟨kahanpaa@ maths.jyu.fi⟩.**

2 ov. kurssin loppukoe ja 4ov kurssin välikoe pidetään keskiviikkona 13.11.

1. Todista, että Paschin lause on yhtä vahva kuin Hilbertin aksiooma (H7) siinä mielessä, että jos (H1)–(H6) ja Paschin lause pätevät, niin myös (H7) on voimassa.

2. Osoita tai kumoa, etta suorien yhdensuuntaisuus on transitiivinen relaatio.

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H7) kulloinkin tarvittavine seurauksineen. Ks. viime kerran moniste.

3. Olkoot l, m ja n eri suoria siten, että $l \parallel m$ ja $m \parallel n$. Olkoon lisäksi A l:n piste, B m:n piste ja C n:n piste siten, että $A * B * C$. Osoita, että $l \parallel n$. (Voisitko heikentää oletusta $A * B * C$ tai jopa jättää sen pois?)

4. Osoita, että suoria on äärettömän paljon.

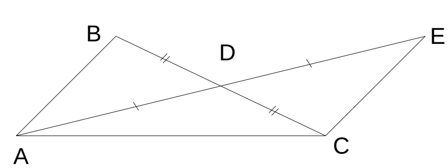
5. Osoita, että jokaisen kolmion sisäpuolella on ainakin yksi piste. (Entä useampia? Onko jokainen tason piste jonkin kolmion sisäpuolella?)

Oletamme seuraavissa tehtävissä Hilbertin aksioomat (H1)-(H15). eli koko *neutraalin geometrian***.** Ks. viime kerran moniste.

6. Olkoot AB ja CD janoja. Keksi tai katso, miten määritellään janojen summa ja janan monikerta. Perustele, että jos $AB \cong CD$, niin $n \cdot AB \cong n \cdot CD$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Entäpä kääntäen ?)

7. Perustele lause 2.5.21, jonka mukaan kolmion kahden kulman summan astemitta on alle 180. (Kulmamitan perusominaisuudet kääntöpuolella. Luennolla todistettiin, että kolmion ulkokulma on suurempi kuin kumpikaan vastakkaisista sisäkulmista.)

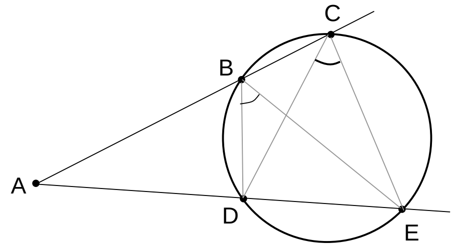
8. Saccheri-Legendren lauseen todistuksessa kolmiota $\triangle ABC$ muunnetaan kulmaa terävöittäen ja kulmien summan säilyttäen. Osoita, että se onnistuu seuraavalla tavalla (kuva alla): Olkoon D sivun BC keskipiste ja E puolisuoralla $\overrightarrow{AD}$ niin, että $AD \cong DE$. Näytä, että kolmiolla $\triangle AEC$ on sama kulmien mittalukujen summa kuin alkuperäisellä kolmiolla $\triangle ABC$ ja että joko $(\measuredangle EAC)^\circ$ tai $(\measuredangle AEC)^\circ$ on alle puolet luvusta $(\measuredangle BAC)^\circ$. Vihje: Osoita aluksi, että $\triangle BDA \cong \triangle CDE$ ja sitten, että $(\measuredangle EAC)^\circ + (\measuredangle AEC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ$.



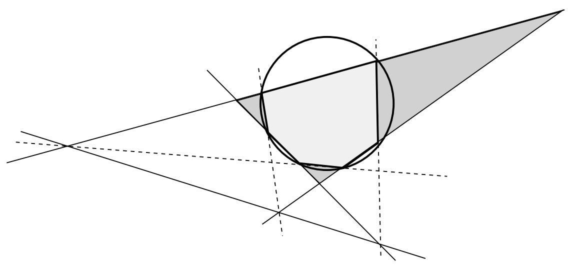
Käännä

9. Ympyrän sisään piirretyn säännöttömän kuusikulmion vastakkaiset sivut kohtaavat kolmessa pisteessä. Osoita, että nämä ovat samalla suoralla. (Päteekö sama ellipsille; entä paraabelille?)

Vihje 1:
$\overline{AB}\ \overline{AC} = \overline{AD}\ \overline{AE}$



Vihje 2:



Vihje 3: Menelaus käänteinen puoli !

Janamamitan perusominaisuudet. Olkoon OI annettu jana. Tällöin on tasan 1 tapa liittää jokaiseen janaan $AB, \ldots$ reaaliluku $\overline{AB}$ siten, että

(1) $\overline{AB} > 0$.
(2) $\overline{OI} = 1$.
(3) $\overline{AB} = \overline{CD}$, joss $AB \cong CD$.
(4) $\overline{AB} < \overline{CD}$, joss $AB < CD$.
(5) $A * B * C$, joss $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
(6) Jokaista lukua $0 < x$ kohti on olemassa jana AB, jolla $\overline{AB} = x$.

Kulmamitan perusominaisuudet. On tasan 1 tapa liittää jokaiseen kulmaan $\measuredangle A, \measuredangle B, \ldots$ reaaliluku $(\measuredangle A)^\circ$ siten, että

(1) $0 < (\measuredangle A)^\circ < 180$
(2) $(\measuredangle A)^\circ = 90$, joss $\measuredangle A$ on suora kulma.
(3) $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.
(4) $(\measuredangle A)^\circ < (\measuredangle B)^\circ$, joss $\measuredangle A < \measuredangle B$.
(5) Jos $\overrightarrow{AC}$ on kulman $\measuredangle DAB$ sisällä, niin $(\measuredangle DAB)^\circ = (\measuredangle DAC)^\circ + (\measuredangle CAB)^\circ$
(6) Jokaista lukua $0 < x < 180$ kohti on olemassa kulma $\measuredangle A$, jolla $(\measuredangle A)^\circ = x$.
(7) Jos $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat täydennyskulmat, niin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = 180$.