Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 9
15 .3.2006

1. Tehtävässä määritellään *summasisätulo* $(x|y)_\oplus = \sum_{j=1}^n (x_j|y_j)_j$. Tarkastetaan
Lin: $(\lambda x + \mu y|z)_\oplus = \sum_{j=1}^n (\lambda x_j + \mu y_j|z_j)_j = \sum_{j=1}^n \big(\lambda(x_j|z_j) + \mu(y_j|z_j)_j\big) = \lambda(x|z)_\oplus + \mu(y|z)_\oplus$.
Konjugaattisymm.: $(y|x)_\oplus = \sum_{j=1}^n (y_j|x_j)_j = \sum_{j=1}^n \overline{(x_j|y_j)_j} = \overline{(x|y)_\oplus}$.
Definiittisyys: $(x|x)_\oplus = 0 \implies \sum_{j=1}^n \underbrace{(x_j \mid x_j)_j}_{\geq 0} = 0 \implies \forall j : (x_j|x_j)_j = 0 \implies x = 0$.

Epäyhtälöt: $\|x\|_\times = \max_{1\leq k\leq n} \|x_k\|_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^2} = \sqrt{(x|x)_\oplus} = \|x\|_\oplus$

$\|x\|_\oplus = \sqrt{\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^2} \leq \sqrt{n \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|_j^2} \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\times$.

2. Sisätuloavaruuden $(H, (.|.)_\oplus) = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ täydellisyys todistetaan kuten $\mathbb{R}^n$:n täydellisyys. Kaikilla $k = 1, \ldots, n$ on määritelty $\iota_k(x_k) = y \in H$, missä $y_j = (0, \ldots, \overset{(j)}{x_j}, \ldots, 0)$. Kolminiminen joukko $\tilde{H}_k = \mathrm{Im}(\iota_k) = \iota_k(H_k)$ on selvästi $\{(0, \ldots, \overset{(j)}{x}, \ldots, 0) \in H \mid x \in H_k\}$ eli $\{0\}\oplus\cdots\oplus H_k \oplus\cdots\oplus\{0\}$. Tälle avaruudelle ι_k on lineaarinen surjektio. Isometrisyys on mukavinta on todeta tarkastamalla sisätulon säilyminen, jolloin normikin tietysti säilyy:

$$(\iota_k(x_k)|\iota_k(y_k))_\oplus = \sum_{j=1}^n \underbrace{(x_j|x_j)_j}_{0,\ \text{kun}\ j\neq k} = (x_k|x_k)_k.$$

Täydellisten avaruuksien isometrisinä kuvina aliavaruudet $\tilde{H}_k \subset H$ ovat täydellisiä ja siis suljettuja. H on kuva-avaruuksien $\tilde{H}_1, \ldots \tilde{H}_n$ *ortogonaalinen* suora summa, onhan $(\iota_k(x_k)|\iota_j(y_j))_\oplus = 0$, kun $j \neq k$.

3. Olkoon $f \in C(2\pi)$ 2π-jaksollinen ja $\hat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Väite: $f(t) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Todistus: Lauseen 0.6 mukaan on olemassa jono Fourier-polynomeja q_n siten, että $q_n \to f$ *tasaisesti.* Olkoon $m = \deg q_n$ Fourier-polynomin q_n aste. Tehtävän 6.5 mukaan Fourier-polynomi $s_m(t) = \sum_{k=-m}^m \hat{f}(k)e^{ikt} \in \mathcal{F}_m$ approksimoi funktiota $f \in C(2\pi)$ L^2-normin suhteen parhaiten kaikkien *m-asteisten* Fourier-polynomien avaruudessa $\mathcal{F}_m$. Mutta tehtävän oletuksin $s_m(t) = 0$. Siis $\|f\|_2 = \|s_m - f\|_2 \leq \|q_n - f\|_2 = \sqrt{\int_\pi^\pi |q_n - f|^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Siis $\int_\pi^\pi |f|^2 = \|f\|_2^2 = 0$. Koska $|f|^2$ on jatkuva ja ≥ 0, niin siis $|f(t)|^2 = 0$ kaikilla t. $\square$
Seuraus: Jos kahdella 2π-jaksollisella $C(2\pi)$-funktiolla f ja g on samat Fourier-kertoimet, niin $f = g$. (Sovella tehtävän tulosta erotukseen $f - g$.)

4. Olkoon $f \in C(2\pi)$ paloittain jatkuvasti differentioituva.

$$\widehat{f'}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\Big|_{\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-ikt}}_{0} - (-ik) . \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = ik \hat{f}(k) \ . \quad \square$$

5. (jatkoa) $f' \in \mathcal{C}[-\pi, \pi] \subset L^2$. Siis tehtävän 7.5 nojalla $\widehat{f'} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ja

$$\|\widehat{f'}\|_2^2 = \|\widehat{f'}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt \quad (< \infty).$$

Arvioidaan f:n Fourier-sarjan osasummien $s_n(t) = \sum_{|k| \le n} \hat{f}(k) e^{ikt}$ erotusta, kun $0 \le p < q$:

$$\begin{aligned} |s_q^f(t) - s_p^f(t)| &= | \sum_{p < |k| \le q} \hat{f}(k)\, e^{ikt}| = | \sum_{p < |k| \le q} \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k)\, e^{ikt}| \\ &\le \sum_{p < |k| \le q} \frac{1}{k} |\widehat{f'}(k)| \overset{\text{Schw}}{\le} \sqrt{\sum_{p < |k| \le q} 1/k^2}\ \|\widehat{f'}(k)\|_2 \to 0, \text{ kun } p \to \infty. \end{aligned}$$

Funktion f Fourier-sarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikt}$ on siis tasaisesti Cauchy ja suppenee näinollen tasaisesti $t \in [-\pi, \pi]$ kohti summaansa, joka olkoon $s \in \mathcal{C}$.
Koska suppeneminen on tasaista, on s:n ja f:n Fourier-kertoimet helppo todeta samoiksi:

$$\begin{aligned} \hat{s}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t)\, e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)\, e^{ijt}\, e^{-ikt}\, dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(j) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}\, e^{-ikt}\, dt}_{0,\ \text{kun } j \ne k} = \hat{f}(k) \ . \end{aligned}$$

Edellisen tehtävän nojalla siis $s = f$. $\square$

6. Todistetaan *Riemann- Lebesguen lemma.* Tarkastellaan 2π-jaksollista L^1-funktiota $f \in L^1(2\pi)$. Pitää osoittaa, että $\hat{f}(k) \to 0$, kun $|k| \to +\infty$. Tehtävän 8.7. nojalla on olemassa jono $L^1 \cap L^2$-funktiota $f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} f$. Toisaalta tehtävän 7.5 nojalla väite pätee funktioille $f_n \in L^2(2\pi)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan n niin suureksi, että $\|f_n - f\|_1 \le \frac{\epsilon}{2}$ ja sitten valitaan $m > n$ niin suureksi, että $\widehat{f_n}(k) \le \frac{\epsilon}{2}$ kaikilla $|k| \ge m$. Nyt

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &= |(\widehat{f - f_n})(k) + \widehat{f_n}(k)| \le |(\widehat{f - f_n})(k)| + |\widehat{f_n}(k)| \\ &\le \|f - f_n\|_1 + \tfrac{\epsilon}{2} \le \epsilon. \end{aligned}$$

HUOM: Fourier-kertoimen laskeminen $h \mapsto \hat{h}(k)$ on lineaarikuvaus $L^1 \to \mathbb{C}$, kuten sen lausekkeesta $\hat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\, e^{-ikt}\, dt$ näkee. Lisäksi lausekkeesta näkee, että tämä lineaarikuvaus on jatkuva ja sen normi on 1, siis $|\hat{h}(k)| \le \|h\|_1$ kaikilla $h \in L^1(2\pi)$. Näitä tietoja edellä käytettin.

7. Olkoon $f \in L^1(2\pi)$ ja $f = 0$ m.k. avoimella **osa**välillä, (tai yleisemminkin osajoukossa) $I \subset [-\pi, \pi]$.

Todistetaan, että f:n Fourier-sarjakin on nolla tuolla osavälillä I, ts. $s_n^f(t) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ kaikilla $t \in I$. Tuloksen nimi, *Riemannin lokalisointilause* viittaa tietenkin siihen, että f:n arvot välin I ulkopuolella eivät vaikuta tässä mitään. (Mieti mikä selitys nimelle saadaan, kun tutkitaan kahta funktiota f ja g, jotka yhtyvät välillä I ja sovelletaan Riemannin lokalisointilausetta erotukseen $f - g$.)

Todistus ohjeen mukaan: Lausutaan osasumma tehtävän 7.4 mukaisesti *Dirichlet'n ytimen* avulla:

$$s_n(f) = \int_a^{a+2\pi} D_n(t-x) f(x)\, dx$$

Tehtävän 7.4 määritelmän mukaan Dirichlet'n ydin on geometrinen summa

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\left(e^{it}\right)^{-n} - \left(e^{it}\right)^{n+1}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1}.$$

Arvioidaan:

$$\begin{aligned}
|s_n^f(t)| &= |\int_a^{a+2\pi} D_n(t-x) f(x)\, dx| \le |\int_a^{a+2\pi} \frac{e^{i(n+1)(t-x)} - e^{-in(t-x)}}{e^{i(t-x)} - 1} f(x)\, dx| \\
&= |\int_a^{a+2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(t-x)} - 1} e^{i(n+1)(t-x)}\, dx - \int_a^{a+2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(t-x)} - 1} e^{-in(t-x)}\, dx| \\
&\le |\int_a^{a+2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(t-x)} - 1} e^{i(n+1)(t-x)}\, dx| + |\int_a^{a+2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(t-x)} - 1} e^{-in(t-x)}\, dx| \\
&= |\int_a^{a+2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(t-x)} - 1} e^{-i(n+1)x}\, dx| + |\int_a^{a+2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(t-x)} - 1} e^{inx}\, dx| \\
&= |\hat{g}(n+1)| + |\hat{g}(-n)|, \text{ missä}
\end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{i(t-x)} - 1}.$$

Tästä väite näyttääkin seuraavan, sillä edellisen tehtävän eli Riemann-Lebesguen lemman mukaan $\hat{g}(n) \to 0$, kunhan on varmistettu, että $g \in L^1(2\pi)$. Tässä tarvitaan viimein tietoa $t \in I$, ja sillä asia onkin selvä, onhan koko ajan $t \in I$ kiinteä luku ja

$$\int |g(x)| = \int_{f(x)\neq 0} \frac{|f(x)|}{|e^{i(x-t)} - 1|}, \text{ missä } f \in L^1,$$

joten riittää osoittaa, että nimittäjä ei pääse mv. lähelle nollaa, vaan $\frac{1}{|e^{i(x-t)}-1|}$ on rajoitettu integroimisjoukossa. Tämä onkin saatu aikaan poistamalla integroimisväliltä turha osa I, jossa $f(x) = 0$. Piste t on avoimen välin I sisäpiste ja siis vähintään jonkin kiinteän $\epsilon > 0$ päässä kaikista väliin I kuulumattomista pisteistä x. Näinollen $|e^{i(x-t)} - 1|$ on suurempi kuin jokin kiinteä luku.