Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 15 **Ratkaisuista**

3.5.2006

Tausta.

Tehtävän 7.4 mukaan Fourier-polynomi $s_n^f(t)$ voidaan lausua integraalimuodossa Dirichlet'n ytimen avulla:

$$s_n(t) = s_n^f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} D_n(t-s)f(s)\,ds \quad , \quad a \in \mathbb{R},$$

Tehtävän 11.7 mukaan ensimmäisten Fourier-summien keskiarvo voidaan lausua integraalimuodossa Fejérin ytimen avulla:

$$\sigma_n^f = \frac{1}{n+1}(s_0^f + s_1^f + \cdots + s_n^f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F_n(t-s)f(s)\,ds \quad .$$

Siis kaikilla $g \in L^1(2\pi)$ on

$$s_m^g = D_m * g \in C(2\pi) \quad , \qquad \text{ja} \qquad \sigma_m^g = F_m * g \in C(2\pi).$$

Fourier'n m. osasumma ja ensimmäisten osasummien keskiarvo määräävät lineaarikuvaukset

$$\begin{aligned} & L^1(2\pi) \to C(2\pi) \subset L^2(2\pi) \subset L^1(2\pi) \\ & S_m : g \mapsto S_m(g) = s_m^g = D_m * g \\ \text{ja} \quad & F_m : g \mapsto F_m(g) = \sigma_m^g = F_m * g. \end{aligned}$$

1. Näytetään aluksi, että rajoitettuina Hilbert-avaruuteen ja tulkittuina operaattoreiksi $L^2(2\pi) \to L^2(2\pi)$ kuvaukset S_m ja F_m ovat jatkuvia ja $\|S_m\| = \|F_m\| = 1$:

Jatkuvuuden ja normille ylärajan 1 antavat epäyhtälöt on helppo johtaa kuvausten sarjamuodosta ja Parsevalin lauseesta: Olkoon $g \in L^2(2\pi)$. Tällöin $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k)e^{ikx}$ ja $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{\ell^2}$. Määritelmien mukaan

$$S_m(g) = \sum_{|k|\le m} \hat{g}(k)e^{ikx} \text{ ja siis } \|S_m(g)\|_{L^2}^2 = \sum_{|k|\le m} |\hat{g}(k)|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|^2 = \|\hat{g}\|_{\ell^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2,$$

$$F_m(g) = \frac{1}{m+1}(S_0(g) + S_1(g) + \cdots + S_m(g)) \quad \text{ja siis edellisen mukaan}$$

$$\|F_m(g)\|_{L^2} \le \frac{1}{m+1}(\|S_0(g)\|_{L^2} + \|S_1(g)\|_{L^2} + \cdots + \|S_m(g)\|_{L^2}) \le \|g\|_{L^2}.$$

valitsemalla $g = 1$ huomaa, että kumpikin normi on myös vähintään 1.

2. Näytetään seuraavaksi, että normiavaruuden $L^1(2\pi)$ operaattorin $S_m\colon L^1(2\pi) \to L^1(2\pi)$ normille pätee

$$\|S_m\| = \|D_m\|_1 = L_m > \frac{4}{\pi^2}\,\log(m+1) \to \infty.$$

Luentojen mukaan (s. 82) Dirichlet'n ytimen integraalinormi $\|D_m\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)|\,ds$ on tasan sama kuin Lebesguen vakio L_n ja sillä on arvio $\|D_m\|_1 = L_m > \frac{4}{\pi^2}\,\log(m+1)$. Osoitetaan, että $\|S_m\| = \|D_m\|_1$.

Johdannossa totesimme, että $S_m(g) = s_m^g = D_m * g$, joten $\|S_m(g)\|_1 = \|D_m * g\|_1 \le \|D_m\|_1\,\|g\|_1$, sillä tehtävän 14.5 mukaan konvoluutiolla on jatkuvuusominaisuus $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\,\|g\|_1$. Siis $\|S_m\| \le \|D_m\|_1$. Toisensuuntaista arviota $\|S_m\| \ge \|D_m\|_1$ ei nyt saa suoraan soveltamalla S_M:ää vakiofunktionn, vaan laskuyritys kaatuu siihen, että D_m ei ole positiivinen funktio. siksi turvaudutaan seuraavaan keinoon.

Tehtävässä 13.4 laskettiin Fejérin ytimille $\|F_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\,ds = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja todistettiin, että $\sigma_n^f \to f$ tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä kaikilla $f \in C(2\pi)$. Erityisesti siis

$$S_m(F_n) = D_m * F_n = \sigma_n^{D_m} \to D_m$$

jopa tasaisesti ja siis myös $\|\cdot\|_1$-mielessä, kun $n \to +\infty$. Siis

$$\|S_m(F_n)\|_1 \to \|D_m\|_1 = \|D_m\|_1\ \|F_n\|_1,$$

joten $\|F_m\|$:n operaattroinormi on vähintään $\|D_m\|_1$.

3. Edellisen tehtävän avulla voidaan nyt osoittaa että on olemassa funktio $g \in L^1(2\pi)$, jonka Fourier'n sarja hajaantuu $\|\cdot\|_1$-normin suhteen, vieläpä siten, että $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n^g\|_1 = +\infty$. Työkaluna tässä on (Bairen kategorialauseeseen perustuva)

Tasaisen rajoituksen periaate. *Jos $T_\alpha : E \to F$, on perhe Banach-avaruuden E jatkuvia lineaarikuvauksia normiavaruuteen F ja jos kaikissa pisteissä $x \in E$ on $\sup_\alpha \|T_\alpha x\|_F < \infty$, $\sup_\alpha \|T_\alpha\| = \infty$.*

Toisin sanoen, jos $\sup_\alpha \|T_\alpha\| = \infty$, niin on olemassa piste, jossa $\sup_\alpha \|T_\alpha x\|_F < \infty$. Sovelletaan tätä periaatetta operaattoreihin $D_m : L^1(2\pi) \to L^1(2\pi)$ ja saadaan heti haluttu tulos!

4. Tehtävän 11.7 mukaan $F_n(h) \to h$ Hilbert-avaruuden L^2-normin suhteen, kun $h \in L^2(2\pi)$. (Tämä oli suora seuraus siitä, että Fourier-sarja suppenee $L^2(2\pi)$:ssä.) ja siten $L^p(2\pi)$-avaruuksien inkluusion jatkuvuuden (tehtävä 7.3) nojalla myös L^1-normin suhteen. Edellisen tehtävän mukaan tulos $F_n(h) \to h$ ei toimi, jos oletammekin ainoastaan, että $h \in L^1(2\pi)$. Sen sijaan keskiarvojen mielessä sarja suppenee L^1-oletuksellakin, toisin sanoen jos $g \in L^1(2\pi)$, **niin $F_n(g) \to g$ jopa normiavaruuden L^1 mielessä**, minkä nyt perustelemme:

Johdannossa totesimme, että $F_m(g) = \sigma_m^g = F_m * g$, joten

$$\|F_m(g)\|_1 = \|F_m * g\|_1 \le \|F_m\|_1\,\|g\|_1,$$

sillä tehtävän 14.5 mukaan konvoluutiolla on jatkuvuusominaisuus $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\,\|g\|_1$. Olemme tehtävässä 13.1 laskeneet Fejerin ytimen integraalinormin $\|F_m\|_1 = 1$. Siis F_m:n operaattorinormi on enintään ykkönen myös avaruudessa $L^1(2\pi)$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Tiedämme, että $L^{1,2}(2\pi) := L^1(2\pi) \cap L^2(2\pi)$ on tiheässä jaksollisten funktioiden avaruudessa $L^1(2\pi)$ (Tehtävä 8.7). Voimme siis valita funktion $h_\epsilon \in L^{1,2}$ siten, että $g = g_\epsilon + h_\epsilon$ ja $\|g_\epsilon\|_1 \leq \epsilon$. Nyt pätee riittävän suurila n:

$$
\begin{aligned}
&\|F_n(h_\epsilon) - h_\epsilon\|_1 \leq \|F_n(h_\epsilon) - h_\epsilon\|_2 < \epsilon \quad \text{ja} \\
&\|F_n(g_\epsilon)\|_1 \leq \|F_n\|_1 \|g_\epsilon\|_1 = \|g_\epsilon\|_1 < \epsilon \quad \text{joten} \\
&\|F_n(g) - g\|_1 \leq \|F_n(h_\epsilon) - h_\epsilon\|_1 + \|F_n(g_\epsilon)\|_1 + \|g_\epsilon\|_1 \epsilon < 3\epsilon.
\end{aligned}
$$

5. Merkitään funktion $f \in L^1(2\pi)$ *konvoluutiopotensseja* lyhyesti

$$f^{*n} = f * \cdots * f \quad (n \text{ kpl}).$$

Kun f on tehtävän 13.5 "sahalaitafunktio", niin $g = f * f$ on

(1) parillinen
(2) 2π-jaksollinen
(3) rationaalikertoiminen (paitsi että π:n potensseja tulee) polynomi välillä $[0, 2\pi]$ (Integroitaessa riittää laskea toinen puoli — se helpompi!)
(4) jatkuva (arvot päissä samat)
(5) siis myös paloittain jatkuvasti differentioituva.

Siten sen Fourier-sarja suppenee kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Tehtävän 14.6 mukaan $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ kun $f, g \in L^1(2\pi)$ ja erityisesti siis

$$g(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^0 = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)^2 \overset{14.6}{=} -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ja induktiolla:

$$f^{*2k}(0) = g^{*k} = 2(-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Samantien on helppo nähdä, että f^{*n} on jatkuva, palottain jatkuvasti differentioituva funktio kaikilla $n > 1$.

Olemme saanee halutun tuloksen

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^k}{2} f^{*2k}(0)$$

kaikilla $k \geq 1$.

(Integrointimuuttujaa vaihtamalla ,π:n potenssien poistamiseksi, on näin helppo nähdä, että Riemannin ζ-funktion arvo $\zeta(n)$ kaikilla *parillisilla kokonaisluvuilla* $n \geq 2$ on muotoa $\pi^n \times$ *rationaaliluku*.)