JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Funktionaalianalyysi 10
22.3.2006

1. Ainakin ehto $(*)$ takaa ortonormaaliuden, sillä jos $f_i = \sum_j a_{ij} e_j$ ja $f_k = \sum_l a_{kl} e_l$, niin

$$(f_i|f_k) = \Big(\sum_j a_{ij} e_j \mid \sum_l a_{kl} e_l\Big) = \sum_j \sum_l a_{ij} \overline{a_{kl}} \underbrace{(e_j \mid e_l)}_{\delta_{jl}} = \sum_j a_{ij} \overline{a_{kj}} \overset{(*)}{=} \delta_{ik} \quad .$$

Sama rivi osoittaa, että jos oletetaan ehto $(f_i|f_k) = \delta_{ik}$, niin saadaan $\sum_j a_{ij} \overline{a_{kj}} = \delta_{ik}$. Huomaa, että tässä tehtävässä riittää olettaa, että alkuperäinen jono $(e_j)_{\mathbb{N}}$ on ortonormaali — sen ei tarvitse olla kanta. Tehtävässä 2. asia on tietenkin toisin.

2. (jatkoa) Olkoon ehdon $(*)$ lisäksi myös $\sum_i a_{ij} \overline{a_{ik}} \overset{(**)}{=} \delta_{jk}$ kaikilla $j, k = 1, 2, \ldots$. Osoitetaan, että ortonormaalijono $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ on totaalinen ja siis Hilbertin kanta. *Totaalisuus* merkitsee, että kaikki alkuperäiset kantavaektorit e_j voidaan lausua sarjana $e_j = \sum_i b_{ji} f_i$. Koska f_j:t ovat ortonormali jono, on ehdokkaat kertoimiksi b_{ji} helppo päätellä: **Jos $e_j = \sum_i b_{ji} f_i$, niin**

$$(e_j|f_k) = \big(\sum_i b_{ji} f_i \mid f_k\big) = \sum_i b_{ji} \underbrace{(f_i|f_k)}_{\delta_{ik}} = b_{jk}.$$

Huomaa, että äärettömän monen termin summaa eli sarjaa edustavien summamerkkien $\sum_i$ siirto ulos sisätulomerkeistä perustuu siihen, että sisätulolla on lineaarisuusominaisuuksiensa lisäksi myös jatkuvuus.

Toisaalta f_k:iden lausekkeiden mukaan :

$$(e_j|f_k) = \big(e_j \mid \sum_l a_{kl} e_l\big) = \sum_l \overline{a_{kl}} \underbrace{(e_j|e_l)}_{\delta_{jl}} = \overline{a_{kj}},$$

joten ainoa ehdokas kerroinjonoksi (b_{ji}) on $(\overline{a_{ij}})$, missä siis on sekä vaihdettu indeksit että kompleksikonjugoitu. Pitää vain lopuksi todeta, että tämä toimii eli että todellakin $e_j = \sum_i \overline{a_{ij}} f_i$. Tämän ratkaisee oletus $\sum_i a_{ij} \overline{a_{ik}} \overset{(**)}{=} \delta_{jk}$, sillä

$$\sum_i \overline{a_{ij}} f_i = \sum_i \overline{a_{ij}} \sum_k a_{ik} e_k \overset{?}{=} \sum_k \underbrace{\sum_i \overline{a_{ij}} a_{ik}}_{\delta_{jk}} e_k = e_j.$$

Itse asiassa tehtävän tämän kohdan ratkaisuksi kelpaa viimenen rivi yksinään!

Seuraavaksi oletetaan, että $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ on Hilbertin kanta ja johdetaan rivien ortonormaaliusehto $(**)$. Tämä on helppoa, sillä edellä jo todettiin, että f_k:iden lausekkeiden mukaan: $(e_j|f_k) = \overline{a_{kj}}$, joten $e_j = \sum_k (e_j|f_k) f_k = \sum_k \overline{a_{kj}} f_k$ ja siis $\delta_{ij} = (e_i|e_j) = \Big(\sum_k \overline{a_{ki}} f_k \mid \sum_l \overline{a_{lj}} f_l\Big) = \sum_k \sum_l \overline{a_{ki}}\ a_{lj} \underbrace{(f_k|f_l)}_{\delta_{kl}} = \sum_k \overline{a_{ki}}\ a_{kj}$ $\square$

$$\sum_i \overline{a_{ij}} a_{ik} = \delta_{jk} = (e_j | e_k) = \big(\sum_i \overline{a_{ij}} f_i \mid \sum_l \overline{a_{lk}} f_l \big).$$

Muistamme lineaarialgebrasta, että äärelliselle neliömatriisille ehdot $(*)$ ja $(**)$ ovat yhtäpitävät, sanoohan $(*)$, että sen sarakkeet eli kantavektorien kuvat ovat ortonormaalit ja $(**)$, että sen rivit ovat ortonormaalit. Kumpikin näistä sanoo erikseen, että kyseessä on *unitaarinen*, reaalisessa tapauksesa *ortogonaalinen* matriisi. Ääretönulotteisessa tapauksessa ehdot eivät kuitenkaan ole yhtäpitäviä, vaan voi helposti löytää yleistetyn matriisin, jolla vain toinen ehdoista $(*)$ ja $(**)$ toteutuu. Tämä on kiinni siitä, että Hilbertin avaruudessa ortonormaali vektorijono ei välttämättä ole totaalinen; esimerkiksi käy jono $((0,1,0,\dots),(0,0,1,0,\dots,),(0,0,0,1,0,\dots),\dots)$, josta huomaa tehtävän kysymykseen vastaavan esimerkin

$$(a_{ij}) = (\delta_{i,j+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (f_1, f_2, f_3, \dots).$$

On siis todella tarpeen vaatia lisäehto $(**)$, jotta $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ olisi kanta.

3. Tehtävän 9.4 mukaan funktion f ja sen derivaatan f' Fourier-kertoimilla on yhteys $\widehat{f'}(k) = ik\,\hat{f}(k)$, mikäli $f \in C(2\pi)$ on paloittain jatkuvasti differentioituva. Nyt tutkitaan vastaavaa integraalille: Oletetaan, että $f \in L^1(2\pi)$ ja että f:n jatkuva kantafunktio $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ on 2π-jaksollinen ja väitetään, että kaikilla K on $\hat{f}(k) = ik\,\widehat{F}(k)$. Tämä väite on yleistys aikaisemmalle tulokselle, sillä jos f on jatkuva, niin $f = F'$.

Ratkaisu vihjeen mukaan, kun $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\, e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\underset{(t)}{\int_0^{2\pi}} \underset{(s)}{\int_0^{t}} f(s)\, e^{-ikt}\, dsdt \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi}\underset{(s)}{\int_0^{2\pi}} \underset{(t)}{\int_s^{2\pi}} f(s)\, e^{-ikt}\, dtds = \frac{1}{2\pi}\underset{(s)}{\int_0^{2\pi}} f(s) \underset{(t)}{\int_s^{2\pi}} e^{-ikt}\, dtds \\
&= \frac{1}{2\pi}\underset{(s)}{\int_0^{2\pi}} f(s) \frac{1}{-ik}\big(\underbrace{e^{2\pi ik}}_{1} - e^{-iks}\big) ds \\
&= \frac{1}{-ik}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} f(s)ds}_{0} + \frac{1}{ik}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-iks}ds = \frac{\widehat{f}(k)}{ik}
\end{aligned}$$

Kohdassa $(\star)$ on vaihdettu integrointijärjestystä Fubinin lauseen mukaisesti. Integrointi tapahtuu kolmiossa $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq 2\pi\}$. Tapaus $k = 0$ hoidetaan näin: $\hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} f \cdot 1 = F(2\pi) - F(0) = 0$, koska oletettiin, että F on 2π- jaksollinen.

4. Olkoon $I =]a,b[$, $f : I \to \mathbb{C}$ integroituva ja $\int_c^d f(t)\,dt = 0$ kaikilla $a < c < d < b$. Väitetään, että $f = 0$ m.k. välillä I.

Koska integraali reaali- ja imaginaariosasta lasketaan erikseen, f:n voi olettaa olevan reaaliarvoinen.

Olkoon aluksi $A = \{t \in I \mid f(t) > 0\}$. Osoitetaan, että $m(A) = 0$. Ideana on näyttää, että $\int_A f(t)\,dt = 0$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Lebesguen mitan määritelmän mukaan on olemassa avoimet välit I_n siten, että $A \subset \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}_{U} \subset I$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < m(A) + \epsilon$, jolloin $m(U \setminus A) < \varepsilon$.

Kuten jokainen avoin joukko, myös $U \subset I$ on yhdiste numeroituvasta joukosta välin I *erillisiä* avoimia osavälejä $J_j \subset I$ ja siis

$$\int_U f = \sum_j \int_{J_j} f \overset{\text{Ol.}}{=} 0.$$

Siis $\int_A f = -\int_{U-A} f$. Koska $m(U \setminus A) < \varepsilon$, joka on mv pieni, niin integraalin absoluuttisen jatkuvuuden nojalla $\int_A f = 0$, ja siis (koska f on A:ssa ei-negatiivinen) $f = 0$ mk. joukossa A, joka siis itse asiassa on nollamittainen. Vastaavasti todetaan, että joukko, jossa f saa negatiivisia arvoja on sekin 0-mittainen. Lopputuloksena $f = 0$ mk välillä I. $\square$

5. Lebesguen lause: Jos funktion $f \in L^1(2\pi)$ kaikki Fourier-kertoimet häviävät, niin $f(t) = 0$ m.k. $t \in \mathbb{R}$.

Todistus: Olkoon $F(x) = \int f(t)\,dt + C$. Todistetaan, että $F = 0$. Käytetään tehtävän 9.3. tulosta. Tarkastetaan ehdot. Ainakin Fon jatkuva. Fourier-kertoimet $\widehat{F}(k)$ ovat nollia, kun $k \neq 0$, sillä tehtävän 10.3. ja oletuksen mukaan $\widehat{F}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{ik} = 0$. Koska $\widehat{F}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(s) \underbrace{e^0}_{1} \,ds$, voi integroimisvakion C valita siten, että myös $\widehat{F}(0) = 0$.

Lopuksi F on 2π-jaksollinen, onhan $F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + C = \hat{f}(0) + C = 0 + C = C$ ja tietysti myös $F(0) = C$. Näin kaikki ehdot on tarkastettu ja siis F on nollafunktio, erityisesti siis vakio. Siksi $\int_c^d f(t)\,dt = 0$ kaikilla $c < d$ välillä I. Edellinen lemma takaa, että $f = 0$. $\square$