Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 13
12.4.2006

1. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ on lukusuoran $\mathbb{R}$ suljettuna aliavaruutena täydellinen metrinen avaruus. Määrää metrisen avaruuden $\mathbb{Z}$ kaikki tiheät ja harvat joukot, samoin $\mathbb{Z}$:n kaikki 1. ja 2. kategorian joukot.

2. Metrinen avaruus X on *perfekti*, jos se on epätyhjä ja sen jokainen piste on kasautumispiste, ts. $X = \overline{X \setminus \{x_o\}}$ kaikilla $x_o \in X$. Näytä, että jokainen perfekti täydellinen metrinen avaruus X on ylinumeroituva.

3. Näytä, että *Cantorin joukko*

$$C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left[[0,1] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{3^n} 3^{-n} \,]k - 2/3,\, k - 1/3[\right) \right]$$

on lukusuoran perfekti suljettu joukko ja siten ylinumeroituva. Totea lisäksi, että C on harva lukusuoralla $\mathbb{R}$. (Huomaa, että esim. kaikki väliltä $[0,1]$ poistettujen avoimien välien päätepisteet kuuluvat Cantorin joukkoon C.)

4. Totea, että tehtävässä 11.7 määritellyille Fejérin ytimille $F_n \geq 0$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\, ds$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja että $F_n(s) \to 0$ tasaisesti kaikilla $\delta \leq |s| \leq \pi$ kun $0 < \delta < \pi$ on kiinteästi valittu vakio ja $n \to +\infty$. Koska jokainen jatkuva jaksollinen funktio on aina tasaisesti jatkuva, niin näytä tämän avulla, että $\sigma_n^f \to f$ tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä kaikilla $f \in C(2\pi)$ kun $n \to +\infty$, lisäksi huomioiden, että

$$\sigma_n^f(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\, (f(t-s) - f(t))\, ds$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. (Voit myös palauttaa mieleen, kuinka tehtävässä 1.3 Bernsteinin polynomien nähtiin antavan tasaisen approksimoinnin välin $[0,1]$ jatkuville funktioille.)

5. Reaaliluvun $t \in \mathbb{R}$ *kokonaisosaa* on tapan merkitään $[t] \in \mathbb{Z}$, toisin sanoen $[t]$ on kokonaisluku siten, että $0 \leq t - [t] < 1$. 2π-jaksollinen funktio

$$f(t) = t - 2\pi \,[(t + \pi)/2\pi]$$

on paloittain jatkuvasti differentioituva ja $f(t) = t$ kaikilla $t \in [-\pi, \pi[$.
Määrää funktion f Fourier-sarjaesitykset

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikt} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt) \quad , \quad -\pi < t < \pi,$$

sekä laske Parsevalin kaavan avulla äärettömät summat

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 \quad .$$

(Vrt. tehtävät 11.7 ja 12.6.)