Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 12
5.4.2006

1. Kun $A, B \in B(H)$ ovat Hilbert-avaruuden H hermiittisiä eli itseadjungoituja operaattoreita, $A^* = A,\ B^* = B$, niin näytä, että niiden *kommutaattori* $[A, B] = AB - BA$ on *antihermiittinen*, $[A, B]^* = -[A, B]$, ja että $i\,[A, B]$ on taas hermiittinen.

2. Tehtävässä 11.7 todettiin jonon $\{e_k = e^{ikt}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ olevan $L^2(2\pi)$:n totaalinen ortonormaalijono ja siten $L^2(2\pi)$:n Hilbertin kanta. Koska $\{e_k\} \subset C^\infty(2\pi)$, niin äärettömän monta kertaa jatkuvasti differentioituvien 2π-jaksolllisten funktioiden muodostama aliavaruus $C^\infty = C^\infty(2\pi)$ on tiheä Hilbert-avaruudessa $L^2(2\pi)$. Näytä, että aliavaruuden C^∞ operaattori $D\colon C^\infty \to C^\infty$,

$$Df = -i\,\frac{df}{dt} \in C^\infty$$

kaikilla $f \in C^\infty$, on *symmetrinen*, ts. että $(Df|g) = (f|Dg)$ kaikilla $f, g \in C^\infty \subset L^2(2\pi)$. (Käytä osittaisintegrointia huomioiden samalla funktioiden f, g jaksollisuuden!)

3. Rajoitettu funktio $a \in L^\infty(2\pi)$ määrää operaattorin $M_a \in B(L^2(2\pi)$, kun kaikilla $f \in L^2(2\pi)$ asetetaan

$$(M_a f)(t) = a(t)f(t) \quad .$$

Totea, että M_a on itseadjungoitu, **joss** funktio a on melkein kaikkialla reaaliarvoinen ts. **joss** $\overline{a(t)} = a(t)$ m.k. $t \in \mathbb{R}$.

4. Määritellään itseadjungoitu operaattori $\mathrm{Sin} := M_{\sin} \in B(L^2(2\pi))$. Määrää kommutaattori $[\mathrm{Sin}, D]$ (aluksi siis vain funktioille $f \in C^\infty$!).

5. Funktio f on paloittain jatkuvasti differentioituva välillä $[a, b]$, jos on olemassa välin $[a, b]$ jako $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_r = b$ siten, että funktiolla f on jokaisella avoimella välillä $]c_{k-1}, c_k[$ derivaatta f', joka kaikilla k laajenee jatkuvaksi funktioksi f'_k koko suljetulle välille $[c_{k-1}, c_k]$. Näytä, että paloittain jatkuvasti differentioituvalla funktiolla f on kaikkialla vasemman- ja oikeanpuoliset raja-arvot, $f(x-) = \lim_{x>t\to x} f(t)$ kun $a < x \le b$, $f(x+) = \lim_{x<t\to x} f(t)$ kun $a \le x < b$.

6. Jos funktio $f \in L^1(2\pi)$ on suljetulla välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sekä jatkuva että paloittain jatkuvasti differentioituva, niin näytä että sen Fourier-sarja $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\,e^{ikt}$ suppenee avoimella välillä $]a, b[$ saaden arvon $f(t)$ kaikilla $t \in]a, b[$. (Määrittele paloittain jatkuvasti differentioituva funktio $g \in C(2\pi)$ siten, että $g(t) = f(t)$ kaikilla $t \in [a, b]$ ja sovella tehtäviä 9.5 ja 9.7.)

7. $R_a f(t) = f(2a - t)$ on *funktion f heijastuma pisteessä $a \in \mathbb{R}$*. Näytä, että funktion $f \in L^1(2\pi)$ ja sen heijastuman $R_a f$ Fourier-sarjan osasummille pätee kaikilla $a \in \mathbb{R}$

$$s_n^{R_a f} = R_a(s_n^f)\ , \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

8. Näytä funktiota $h_a = \frac{1}{2}(f + R_a f)$ käyttäen, että paloittain jatkuvasti differentioituvan funktion $f \in L^1(2\pi)$ Fourier-sarja suppenee kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja että

$$s^f(a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\,e^{ika} = \frac{1}{2}\,[f(a-) + f(a+)] \quad .$$