29.3. Hermiittisen operaattorin spektraaliparven konstruktio.

IDEOINTI 29.9. Varmistettuamme näin integraalin olemassaolon käymme varsinaisen ongelman kimppuun: Miten hermiittisestä operaattorista muodostetaan spektraalimitta $\mathbf{E}$, jonka avulla A voidaan lausua "diagonaalimuodossa" $A = \int_m^{M_+} \lambda\, d\mathbf{E}_\lambda$.

Arvataan aluksi $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}([-\infty, 0[)$. Tarkasteltuamme esimerkkinä diagonaalimuotoista operaattoria olemme saaneet aiheen ajatella, että diagonaalimuotoinen operaattori on positiivinen, jos $\mathbf{E}_\lambda = 0$ kaikille $\lambda \leq 0$. Erityisesti A:n rajoittuma operaattorin $\mathbf{E}([0, \infty[)$ kuva-avaruuteen, jota merkitsemme $H_{[0,\infty[}$ on positiivinen ja rajoittuma operaattorin $\mathbf{E}_0$ kuva-avaruuteen H_0 on negatiivinen. Koska ortoprojektio määräytyy kuva-avaruudestaan, olisi riittävää löytää nämä. Kun $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin operaattoreilla T ja λT on tietysti aina sama kuva-avaruus. Siksi $H_{[0,\infty[}$ saattaisi hyvinkin olla sama asia kuin kuin A:n *positiivisen osan* $A_+ = \int_0^{M_+} \lambda\, d\mathbf{E}_\lambda$. kuva-avaruus. Tämän ohjelman läpiviemiseen tarvitaan konstruktio, jolla A:n positiiviosa saadaan määrättyä suoraan ilman spektraaliesitystä. Osoittautuu, että se onnistuu: $A_+ = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2} - A)$. Neliöjuuren voi koettaa määritellä sarjakehitelmän avulla.

Toteutamme edellä hahmotellun suunnitelman, mutta motivaation ylläpitämiseksi emme tee sitä ihan järjestyksessä, vaan katsomme ensin, miten A:n positiiviosan kuva-avaruuden avulla konstruoidaan etsitty spektraaliparvi. Konstruktio aloitetaan asettamalla $\mathbf{E}_+ = I - \mathbf{E}_0$.

Seuraava lemma luettelee A:n positiiviosan kuva-avaruudelle projisioivan projektion $\mathbf{E}_+$ oleelliset ominaisuudet:

LEMMA 29.10. *Hermiittisestä operaattorista A lähtemällä voidaan konstruoida ortoprojektio $\mathbf{E}_+$, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

(1) $\mathbf{E}_+$ *kommutoi A:n kanssa ja jokaisen sellaisen operaattorin kanssa, joka kommutoi A:n kanssa, ts. jos $B \in \mathcal{B}(H)$ ja $AB = BA$, niin $\mathbf{E}_+ B = B\mathbf{E}_+$.*
(2) $A\mathbf{E}_+ \geq 0$ *ja* $A(I - \mathbf{E}_+) \leq 0$.
(3) $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(I - \mathbf{E}_+)$.

TODISTUS. Perustelun idea esitettiin edellä. Yksityiskohdat käymme läpi kohdissa 29.11 – 29.24.

MÄÄRITELMÄ 29.11. Olkoon $\mathbf{E}_\lambda = I - \mathbf{E}_+(\lambda)$, missä $\mathbf{E}_+(\lambda)$ on hermiittisestä operaattorista $A - \lambda I$ lemman 29.10 mukaan konstruoitu projektio.

HUOMAUTUS 29.12. Ideana on, että $\mathbf{E}_+(\lambda)$ on likimain projektio operaattorin A λ:aa suurempia spektraaliarvoja vastaavalle aliavaruudelle, joka on sama kuin operaattorin $A - \lambda I$ positiivisia spektraaliarvoja vastaava aliavaruus.

LAUSEEN 29.6. TODISTUS. Osoitamme, että edellä määritelty kuvaus $\mathbf{E}$ täyttää lauseen 29.6 ehdot. Emme taaskaan etene aivan numerojärjestyksessä.

Ainakin jokainen $\mathbf{E}_\lambda$ on projektio.

29.6.(3) Haluttu kommutointiehto seuraa tietysti lemmasta 29.10. Erityisesti siis $\mathbf{E}_\lambda \mathbf{E}_\mu = \mathbf{E}_\mu \mathbf{E}_\lambda$ kaikilla λ ja μ. Tätä kommutointiehtoa käytämme seuraavissa laskuissa tuon tuostakin.

29.6.(1) Osoittaaksemme, että $\mathbf{E}_\lambda$ on kasvava oletamme, että $\lambda < \mu$, ja väitämme, että $\mathbf{E}_\lambda \leq \mathbf{E}_\mu$, eli että $\mathbf{E}_\lambda = \mathbf{E}_\lambda \mathbf{E}_\mu$, eli että operaattori $P = \mathbf{E}_\lambda(I - \mathbf{E}_\mu)$ on 0.

$\mathbf{E}_\lambda$ on määritelty lemman 29.10 avulla, jossa olennaista on[142] , että

$$(A - \lambda I)\mathbf{E}_\lambda \leq 0$$

ja

$$(A - \lambda I)(I - \mathbf{E}_\lambda) \geq 0.$$

Tietysti samat kaavat pätevät $\mathbf{E}_\mu$:lle.

Projektioiden perusominaisuudesta $E^2 = E$ saadaan, että

$$\mathbf{E}_\lambda P = P \text{ ja } (I - \mathbf{E}_\mu)P = P.$$

Tehtävänä on osoittaa, että jokainen Px on 0. Koska

$$\mathbf{E}_\lambda(Px) = Px \text{ ja samoin } (I - \mathbf{E}_\mu)(Px) = Px,$$

niin (1):n nojalla

$$\begin{aligned} ((A - \lambda I)Px|Px) &= ((A - \lambda I)\mathbf{E}_\lambda Px|Px) \leq 0 \quad \text{ja} \\ ((A - \mu I)Px|Px) &= ((A - \mu I)(I - \mathbf{E}_\mu)Px|Px) \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Erotus antaa $(\lambda - \mu)(Px|Px) = (\lambda - \mu)\|Px\|^2 \geq 0$. Mutta oletimme $\lambda < \mu$, joten ilmeisesti todella $Px = 0$.

29.6.(2) ja 29.6.(4) Spektraaliparven kuuluu olla vasemmalta vahvasti jatkuva. Näytämme samantien oikeanpuoleistenkin pisteittäisten raja-arvojen olemassaolon. Muistamme aluksi, että reaaliarvoisella kasvavalla funktiolla on kaikkialla olemassa toispuoleiset raja-arvot. Todistammekin väitteemme reaaliarvoisen funktion $\lambda \mapsto (\mathbf{E}_\lambda x|x)$ avulla. Ennen sitä kirjaamme kuitenkin vielä edellisen kohdan havaintoja vähän uuteen muotoon:

Valmistelu. Olkoon taas $\lambda < \mu$. Merkitään $\Delta = [\lambda, \mu[$ ja $\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}([\lambda, \mu[) = \mathbf{E}_\mu - \mathbf{E}_\lambda$. Koska $\lambda \mapsto \mathbf{E}_\lambda$ on kasvava parvi projektioita, niin $\mathbf{E}_\mu \mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}(\Delta)$ ja $(I - \mathbf{E}_\lambda)\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}(\Delta) \geq 0$. Todistuksen alkuosassa esiintyvät kaavat (1) koskevat erikseen lukuja λ ja μ, joten yhtä lailla

$$\begin{aligned} (A - \mu I)\mathbf{E}_\mu \leq 0 &\qquad \text{ja samasta syystä} \\ (A - \lambda I)(I - \mathbf{E}_\lambda) \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Saamme:

$$\begin{aligned} (A - \mu I)\mathbf{E}(\Delta) &= (A - \mu I)\mathbf{E}\mu\mathbf{E}(\Delta) \leq 0 \\ (A - \lambda I)\mathbf{E}(\Delta) &= (A - \lambda I)(I - \mathbf{E}\lambda)\mathbf{E}(\Delta) \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

[142] Muista laskiessasi että määritelmässä on kaksi siirtymää komplementaariseen avaruuteen: $\mathbf{E}_\lambda = I - \mathbf{E}_+(\lambda)$, missä $\mathbf{E}_+(\lambda)$ on hermiittisestä operaattorista $A - \lambda I$ lemman 29.10 mukaan konstruoitu projektio.

joten

$$\lambda \mathbf{E}(\Delta) \leq A\mathbf{E}(\Delta) \leq \mu \mathbf{E}(\Delta), \qquad \text{missä } \Delta = [\lambda, \mu[. \tag{5}$$

Näiden valmistelujen jälkeen tarkastamme raja-arvo-ominaisuudet kohdassa $\mu \in \mathbb{R}$. Olkoon sitä varten $x \in H$. Parven $\lambda \mapsto \mathbf{E}_\lambda$ kasvavuuden takia funktio $\lambda \mapsto (\mathbf{E}_\lambda x|x)$ on kasvava, joten sillä on ainakin toispuoleiset raja-arvot $\lim_{\lambda \nearrow \mu}(\mathbf{E}_\lambda x|x)$ ja $\lim_{\lambda \searrow \mu}(\mathbf{E}_\lambda x|x)$. Olkoot $\lambda < \nu < \mu$. Koska $\mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\lambda$ on ortoprojektio, niin

$$\|\mathbf{E}_\nu x - \mathbf{E}_\lambda x\|^2 = ((\mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\lambda)^2 x|x) = ((\mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\lambda)x|x) = (\mathbf{E}_\nu x|x) - (\mathbf{E}_\lambda x|x) \to 0 \in H,$$

kun $\lambda \nearrow \mu$ ja siis myös $\nu \nearrow \mu$. Koska avaruus H on täydellinen, on siis olemassa raja-arvot $\lim_{\lambda \nearrow \mu} \mathbf{E}_\lambda x = \mathbf{E}_{\mu-} x$ ja $\lim_{\lambda \searrow \mu} \mathbf{E}_\lambda x = \mathbf{E}_{\mu+} x$. On enää varmistettava parven vahva jatkuvuus vasemmalta, siis että kaikilla $x \in H$ on $\mathbf{E}_{\mu-} x = \mathbf{E}_\mu x$.

Olkoon $\mathbf{E}(\Delta_0) = \mathbf{E}_{\mu-} - \mathbf{E}_\mu$ ja $x \in H$. Määritelmien mukaan

$$\mathbf{E}(\Delta)x = (\mathbf{E}_\mu - \mathbf{E}_\lambda)x \overset{\lambda \nearrow \mu}{\to} \mathbf{E}(\Delta_0)x.$$

Olemme edellä jo huomanneet kaavassa (5), että $\lambda \mathbf{E}(\Delta) \leq A\mathbf{E}(\Delta) \leq \mu \mathbf{E}(\Delta)$, joten operaattori $\mu \mathbf{E}(\Delta_0) - A\mathbf{E}(\Delta_0)$ on sekä positiivinen että negatiivinen, siis nolla. Toisin sanoen

$$(\mu I - A)\mathbf{E}(\Delta_0) = 0,$$

eli operaattorin $(\mu I - A)$ rajoittuma projektion $\mathbf{E}(\Delta_0)$ kuva-avaruuteen on 0, eli $\operatorname{Im}(\mathbf{E}(\Delta_0)) \subset \operatorname{Ker}(\mu I - A)$. Lemman 29.10 kolmas – varta vasten tätä tarkoitusta varten asetettu – ehto $\operatorname{Ker}(\mu I - A) \subset \operatorname{Ker}(I - \mathbf{E}_+(\lambda))$ antaa tiedon $\operatorname{Im}(\mathbf{E}(\Delta_0)) \subset \operatorname{Ker}(I - \mathbf{E}_+(\lambda))$ eli

$$\mathbf{E}_\mu \mathbf{E}(\Delta_0) = 0.$$

Kaikilla $x \in H$ pätee siis

$$\mathbf{E}(\Delta_0)x = \lim_{\lambda \nearrow \mu} \mathbf{E}(\Delta)x = \lim_{\lambda \nearrow \mu} \mathbf{E}_\mu \mathbf{E}(\Delta)x = \mathbf{E}_\mu \mathbf{E}(\Delta_O)x = 0,$$

joten $\mathbf{E}(\Delta_O)x = 0$, mikä juuri on haluttu vasemmanpuoleinen pisteittäinen jatkuvuus.

Osoitetaan seuraavaksi kohdat 29.6.(3) ja 29.6.(1), joiden mukaan riittää integroida A:n alarajasta m sen ylärajaan M. Olkoon aluksi $\mathbf{E}_\lambda \neq 0$. On olemassa $x \in H$, jolla $\mathbf{E}_\lambda x \neq 0$. Voimme valita x:n siten, että vektorin $y = \mathbf{E}_\lambda x$ pituus on 1. Nyt

$$(Ay|y) - \lambda = ((A - \lambda I)y|y) = ((A - \lambda I)\mathbf{E}_\lambda y|y) \leq 0,$$

koska olemme aikaisemmin osoittaneet, että $(A - \lambda I)\mathbf{E}_\lambda \geq 0$. Tästä saadaan haluttu epäyhtälö $m \leq (Ay|y) \leq \lambda$. Olkoon seuraavaksi $\mathbf{E}_\lambda \neq I$. Soveltamalla edellistä päättelyä operaattoriin $I - \mathbf{E}_\lambda$ saadaan epäyhtälö $\lambda \leq M$.

Lauseen 29.6 väitteistä on enää jäljellä mielenkiintoisin kohta (2) — A:n lausuminen spektraali-integraalina. Tarkastellaan jakoa

$$m = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = M + \varepsilon$$

ja merkitään $\Delta_k = [\lambda_{k-1}, \lambda_k[$, jolloin $\mathbf{E}(\Delta_k) = \mathbf{E}_{\lambda_k} - \mathbf{E}_{\lambda_{k-1}}$. Edellä todistetun tärkeän epäyhtälön (5) mukaan $\lambda\mathbf{E}(\Delta) \le A\mathbf{E}(\delta) \le \mu\mathbf{E}(\Delta)$, kun $\lambda < \mu$, joten

$$\lambda_{k-1}\mathbf{E}(\Delta_k) \le A\mathbf{E}(\Delta_k) \le \lambda_k\mathbf{E}(\Delta_k).$$

Summaamalla puolittain saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}\mathbf{E}(\Delta_k) \le A\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta_k) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\mathbf{E}(\Delta_k)$$

Tietysti $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta_k) = I$. Muuta ei tarvita, sillä tiedämme jo, että jaon tihentyessä kumpikin summa suppenee kohti samaa operaattoria $\int_0^{M_+} \lambda\, d\mathbf{E}_\lambda$.

Perustelemme lopuksi spektraaliparven yksikäsitteisyyden. Muistamme sitä varten lineaarisuuslauseen 29.7 antaman tiedon, jonka mukaan jokaisella polynomilla p pätee

$$p(A) = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\, d\mathbf{E}_\lambda.$$

Tästä saadaan kaikilla $x \in H$ summien $\sum p(\xi_k)(\mathbf{E}(\Delta_k)x|x)$ raja-arvoja katsomalla:

$$(p(A)x|x) = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\, d(\mathbf{E}_\lambda x|x),$$

missä oikea puoli on tavallinen Riemann-Stieltjes-integraali, onhan funktio $\lambda \mapsto (\mathbf{E}_\lambda x|x)$ kasvava.

Olkoonpa nyt sitten $\mathbf{F}_\lambda$ toinen spektraaliparvi, jolla

$$A = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda\, d\mathbf{F}_\lambda,$$

ja joka toteuttaa myös lauseemme jatkuvuus- ja kommutointiehdot. Tällöin tietysti myös

$$p(A) = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\, d\mathbf{F}_\lambda,$$

joten kaikilla $x \in H$ ja polynomeilla p pätee

$$0 = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\, d((\mathbf{E}_\lambda x|x) - (\mathbf{F}_\lambda x|x)) = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\, d((\mathbf{E}_\lambda - \mathbf{F}_\lambda x|x)).$$

Stonen ja Weierstrassin lauseen mukaan polynomit ovat sup-normin mielessä tiheässä kaikkien välillä jaktuvien funktioiden avaruudessa. Siksi

$$\int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\, d((\mathbf{E}_\lambda - \mathbf{F}_\lambda)x|x) = 0$$

kaikilla jatkuvilla funktioilla p. Tästä seuraa (harjoitustehtävä; huomaa lisätieto: $\lambda \mapsto ((\mathbf{E}_\lambda - \mathbf{F}_\lambda)x|x)$ on vasemmalta jatkuva!), että $((\mathbf{E}_\lambda - \mathbf{F}_\lambda)x|x)$ on vakio, joka tietysti on 0, koska $\mathbf{E}_m = \mathbf{F}_m$. Hermiittinen operaattori $\mathbf{E}_\lambda - \mathbf{F}_\lambda$ on siten sekä positiivinen että negatiivinen, siis 0. $\square$

Ryhdymme nyt todistamaan konstruktion keskeistä lemmaa 29.10, jonka mukaan hermiittisestä operaattorista A lähtemällä voidaan konstruoida ortoprojektio $\mathbf{E}_+$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(1) $\mathbf{E}_+$ kommutoi A:n kanssa ja myös jokaisen sellaisen operaattorin kanssa, joka kommutoi A:n kanssa, ts. jos $B \in \mathcal{B}(H)$ ja $AB = BA$, niin $\mathbf{E}_+ B = B\mathbf{E}_+$.
(2) $A\mathbf{E}_+ \geq 0$ ja $A(I - \mathbf{E}_+) \leq 0$.
(3) $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(I - \mathbf{E}_+)$.

Todistusta varten tarvitaan positiivisen operaattorin neliöjuuri, jonka olemassaolo on tärkeä keksintö.

29.4. Positiivisen operaattorin neliöjuuri.

MÄÄRITELMÄ 29.13. Positiivisen operaattorin A *(positiivinen) neliöjuuri* on (positiivinen) hermiittinen opeaattori B, jolle $B^2 = A$.

Tavoitteenamme on viime kädessä määritellä hermiittisen operaattorin positiivinen osa. Positiivinen osa tulee olemaan $\frac{1}{2}(|A| - A)$, missä $|A| = \sqrt{A^2}$. Siksi neliöjuuren olemassaolon todistaminen on tarpeellista. Seuraavat kolme lausetta johtavatkin tähän tulokseen.

LEMMA 29.14. *Jos hermiittiset operaattorit A ja B kommutoivat, ja B on positiivinen, niin myös $BA^2 \geq 0$.*

TODISTUS.

$$(BA^2x|x) = (ABAx|x) = (BAx|Ax) \geq 0. \qquad \square$$

LAUSE 29.15 (RIESZ N. 1930). *Jos A ja B ovat on positiivisia ja $AB = BA$, niin myös $BA \geq 0$.*

TODISTUS. Voimme olettaa, että $A \neq 0$ ja samantien, että $\|A\| = 1$. Konstruoidaan rekursiivisesti jono hermiittisiä operaattoreita A_n

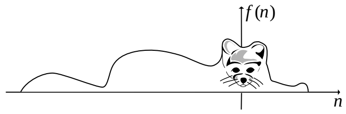
$$A_1 = A$$
$$A_{n+1} = A_n - A_n^2.$$

Ideana on näyttää, että kaikilla $x \in H$ pätee $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 x$, jolloin päästään käyttämään edellistä lemmaa. Tietysti jokainen A_k kommutoi B:n kanssa.

Koska määritelmän mukaan $A_n^2 = A_n - A_{n+1}$, niin

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k+1}) = A_1 - A_{n+1} = A - A_{n+1},$$

ja riittää osoittaa, että $A_n x \to 0$ kaikilla $x \in H$.



Aloitetaan tarkastamalla induktiolla, että $0 \leq A_n \leq I$. Alku on triviaali: $0 \leq A_1 = A \leq \|A\| I = I$. Induktioaskelta varten oletetaan, että $0 \leq A_n \leq I$, toisin sanoen $0 \leq A_n$ ja $0 \leq (I - A_n)$. Määritelmän mukaan $A_{n+1} = A_n - A_n^2 = (I - A_n)A_n$, joten tilanne ei ole sama kuin edellisessä lemmassa. Asiantila voidaan korjata:

$$A_{n+1} = A_n(I - A_n) = A_n(I - A_n)^2 + (I - A_n)A_n^2.$$

Näin siis todella $A_{n+1} \geq 0$. Toinen epäyhtälö saadaan helpommin:

$$(I - A_{n+1}) = I - A_n + A_n^2 \geq 0.$$

Kun näin on todistettu, että $0 \leq A_n \leq I$, niin siirrytään näyttämään, että $A_k x \to 0$, kun $x \in H$. Jokaisessa pisteessä $x \in H$ pätee kaikilla n:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \|A_k x\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (A_k x | A_k x) = \sum_{i=1}^{n} (A_k^2 x | x) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} A_k^2 x | x \right) = (A_1 x|x) - (A_{n+1} x | x) \leq (A_1 x|x),\end{aligned}$$

joten positiiviterminen sarja on rajoitettu ja siis suppenee. Tämä riittää. □

Seuraava havainto on, että kasvava, rajoitettu jono hermiittisiä operaattoreita A_n suppenee, mikäli yläraja B kommutoi jokaisen A_n:n kanssa.

Seuraus 29.16[143]. *Jos kasvavalla jonolla hermiittisiä keskenään kommutoivia operaattoreita $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(H)$ on yläraja $B \in (H)$, joka kommutoi jokaisen A_n:n kanssa, niin jono suppenee pisteittäin eli vahvasti kohti jotakin hermiittistä operaattoria A.*

Todistus. Erotukset $T_n = B - A_n$ muodostavat vähenevän jonon keskenään kommutoivia positiivisia operaattoreita. Rieszin lauseen 29.15 mukaan

$$\begin{aligned}(T_m - T_n)T_m &\geq 0 \\ \text{ja } (T_m - T_n)T_n &\geq 0 \quad \text{kun } m < n.\end{aligned}$$

Erityisesti siis tällöin jokaiselle $x \in H$ pätee

$$(T_m^2 x|x) \geq (T_m T_n x|x) \geq (T_n^2 x|x).$$

Näinollen ei-negatiiviset luvut $(T_m^2 x|x)$ muodostavat vähenevän jonon, joka siis suppenee. Lisäksi $(T_m T_n x|x)$ suppenee kohti samaa raja-arvoa, kun n ja m kasvavat rajatta. Tästä seuraa, että jono $(T_m x)_{\mathbb{N}} \subset H$ on Cauchy, sillä

$$\|T_m x - T_n x\|^2 = ((T_m - T_n)^2 x|x) = (T_m^2 x|x) + (T_n^2 x|x) - 2(T_m T_n x|x) \to 0.$$

Avaruuden H täydellisyyden vuoksi $(T_n x)_{\mathbb{N}}$ suppenee ja siis myös jonolla $(A_n x)_{\mathbb{N}}$ on raja-arvo. □

[143]Vertaa reaalilukujen aksioomiin!

LAUSE 29.17. *Jos $A \in \mathcal{B}(H)$ on positiivinen, niin on olemassa tasan yksi positiivinen operaattori $B \in \mathcal{B}(H)$, jolle $B^2 = A$. Tämä operaattori, A:n positiivinen neliöjuuri $B = \sqrt{A}$ kommutoi jokaisen sellaisen operaattorin kanssa, joka kommutoi A:n kanssa.*

TODISTUS. Ideana on matkia tunnettua tapaa muodostaa positiiviluvun neliöjuuri Banachin kiintopistelauseen avulla.

Riittää tietysti tutkia tapausta, jossa $A \leq I$. Määritellään rekursiivisesti jono hermiittisiä A:n ja jokaisen sen kanssa kommutoivan operaattorin kanssa kommutoivia operaattoreita asettamalla

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_{n+1} &= B_n + \tfrac{1}{2}(A - B_n^2). \end{aligned}$$

Osoitamme, että jono suppenee pisteittäin, ja että raja-arvo on A:n positiivinen neliöjuuri, vieläpä ainoa. Ainakin $B_n \leq I$, sillä

$$I - B_{n+1} = \tfrac{1}{2}(I - B_n)^2 + \tfrac{1}{2}(I - A) \geq 0. \tag{1}$$

Yhtälöstä (1) saamme samalla tiedon, että

$$B_{n+1} - B_n = \tfrac{1}{2}\big((I - B_{n-1} + (I - B_n)\big)(B_n - B_{n-1}),$$

josta seuraa induktiolla, että jono $(B_n)_{\mathbb{N}}$ on kasvava. Seurauksen 29.16 perusteella jono siis suppenee pisteittäin kohti jotakin hermiittistä — tässä tietysti suorastaan positiivista — operaattoria B, joka kommutoi A:n ja jokaisen sen kanssa kommutoivan operaattorin kanssa, ja jolle B_n-jonon konstruktion nojalla pätee

$$B = B + \tfrac{1}{2}(A - B^2),$$

eli $B^2 = A$.

Positiivisen neliöjuuren olemassaolo on todistettu. Näytetään vielä sen yksikäsitteisyys. Olkoon D toinen A:n positiivinen neliöjuuri. Merkitään $y = Bx - Dx$, kun $x \in H$.

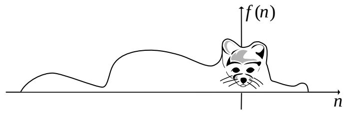
$$((B + D)y|y) = ((B + D)(B - D)x|y) = ((B^2 - D^2)x|y) = 0.$$

Tästä seuraa, että $(By|y) = (Dy|y) = 0$, sillä B ja D ovat positiivisia operattoreita. Koska B ja D ovat positiivisia, on niilläkin positiiviset neliöjuuret. Olkoon $C = \sqrt{B}$. Nyt

$$\|Cy\|^2 = (C^2y|y)(By|y) = 0,$$

joten $CY = 0$ ja siis myös $By = 0$. Samoin $Dy = 0$. Saamme:

$$\|Bx - Dx\|^2 = ((B - D)^2x|x) = ((B - D)y|x) = 0. \qquad \square$$



29.5. Spektraaliparven konstruktion puuttuva osa.

Lause 29.18. *Olkoon $A \in (H)$ hermiittinen. Olkoon $\mathbf{E}_+$ ortoprojektio aliavaruudelle $K_+ = \operatorname{Ker}(A - \sqrt{A^2})$. Tällöin $\mathbf{E}_+$:lla on lemman 29.10 vaatimat ominaisuudet:*

(1) *$\mathbf{E}_+$ kommutoi jokaisen sellaisen operaattorin kanssa, joka kommutoi A:n kanssa.*
(2) *$A\mathbf{E}_+ \geq 0$ ja $A(I - \mathbf{E}_+) \leq 0$.*
(3) *$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(I - \mathbf{E}_+)$.*

Todistus. (1) Olkoon $AD = DA$. Tällöin myös $(A - \sqrt{A^2})D = D(A - \sqrt{A^2})$, joten $D(K_+) \subset K_+$ ja siis $D\mathbf{E}_+(H) = D(K_+) \subset K_+$, eli $\mathbf{E}_+ D\mathbf{E}_+ = D\mathbf{E}_+$. Myös adjungaatti D^* kommutoi tietysti A:n kanssa, joten samoin perusteluin saadaan $\mathbf{E}_+ D^* \mathbf{E}_+ = D^* \mathbf{E}_+$. Näistä seuraakin

$$\mathbf{E}_+ D = (D^* \mathbf{E}_+)^* = (\mathbf{E}_+ D^* \mathbf{E}_+)^* = \mathbf{E}_+ D \mathbf{E}_+ = D\mathbf{E}_+,$$

siis väite (1).

(3) Olkoon $Ax = 0$. Silloin kaikilla $x \in H$:

$$(\sqrt{A^2}x | \sqrt{A^2}x) = (A^2 x | x) = (0|x) = 0,$$

joten $\sqrt{A^2}x = 0$, ja siis $x \in \operatorname{Ker}(A - \sqrt{A^2}) = K_+$, joten $\mathbf{E}_+ x = x$.

(2) Aloitetaan viimeinen vaihe osoittamalla, että $A\mathbf{E}_+ \geq 0$. Rieszin lauseen 29.15 mukaan kahden kommutoivan positiivisen operaattorin tulo on positiivinen. Projektiona $\mathbf{E}_+$ tietenkin on positiivinen, mutta A yleensä ei. Väitteemme saadaan kuitenkin todistettua, sillä $A\mathbf{E}_+ = \sqrt{A^2}\mathbf{E}_+$, koska kohdan (1) kommutaatioominaisuuksien ja $\mathbf{E}_+$:n määritelmän nojalla

$$A\mathbf{E}_+ - \sqrt{A^2}\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_+(A - \sqrt{A^2}) = 0.$$

Toisen epäyhtälön $A(I - \mathbf{E}_+) \leq 0$ osoittamiseksi riittää Rieszin lauseen mukaan näyttää, että

$$(*) \qquad A(I - \mathbf{E}_+) = -(I - \mathbf{E}_+)\sqrt{A^2}.$$

Kaikilla $x \in H$ on

$$(A - \sqrt{A^2})(A + \sqrt{A^2})x = (A^2 - A^2)x = 0,$$

joten Im

$$(A + \sqrt{A^2}) \subset \operatorname{Ker}(A - \sqrt{A^2}) = K_+ = \operatorname{Im} \mathbf{E}_+,$$

eli

$$\mathbf{E}_+(A + \sqrt{A^2}) = (A + \sqrt{A^2}).$$

Mutta $\mathbf{E}_+ A = \mathbf{E}_+ \sqrt{A^2}$, joten

$$\mathbf{E}_+ A = \mathbf{E}_+ \sqrt{A^2} = \tfrac{1}{2}(A + \sqrt{A^2}).$$

Yhtälössä $(*)$ ja koko lauseessa ei ole enää todistettavaa. $\square$

Myös spektraaliesityslause on todistettu.

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun X

Harjoitustehtäviä lukuun X.

29.1. Olkoon D äärellisulotteisen avaruuden $H = \mathbb{C}^n$ diagonaalioperaattori, jolla on ominaisarvot $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ ja standardikannassa matriisi

$$\mathrm{Mat}\, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Määrää spektraaliparvi $\mathbf{E} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ siten, että D

$$D = \int_m^{M+} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda.$$

Vrt. esim. 29.4.[144]

29.2. a) Olkoon D äärellisulotteisen avaruuden $H = \mathbb{C}^n$ diagonaalioperaattori, jolla on ominaisarvot $\lambda_1, \dots \lambda_k$ ominaisavaruuksin $H_1, \dots, H_k \subset H$

$$\mathrm{Mat}\, D = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \begin{pmatrix} \lambda_K & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Osoita, että D on muotoa

$$D = \int_m^{M+} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda$$

ja määrää spektraaliparvi $\mathbf{E} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$.

b) Määrää projektio $\mathbf{E}([a, b[)$ kaikille väleille.

c) Määrää projektio $\mathbf{E}(A)$ kaikille avoimille joukoille $A \subset \mathbb{R}$.

c) Määrää projektio $\mathbf{E}(B)$ kaikille Borelin joukoille $B \subset \mathbb{R}$. (Jos mittateoria ei ole ihan vireessä, unohda koko juttu.)

29.3. Olkoon $H = \mathbb{C}^n$. Määrää jokin muotoa

$$D = \int_0^{0+} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda$$

oleva operaattori, missä spektraaliparveen $\mathbf{E} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ liittyvän mitan kantaja sisältyy joukkon $\{0\}$, toisin sanoen $\mathbf{E}([a, b[) = 0$, kun $0 \notin [a, b[$.

29.4. Olkoon $H = \mathbb{C}^n$. Määrää kaikki muotoa

$$D = \int_1^{1+} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda,$$

[144] Fyysikoiden käyttämin bra- ja ket-merkinnöin: $(\cdot|e_1)e_1 = |e_1\rangle\langle e_1|$.

olevat operaattorit, missä spektraaliparveen $\mathbf{E} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ liittyvän mitan kantaja sisältyy joukkon $\{1\}$, toisin sanoen $\mathbf{E}([a,b[) = 0$, kun $1 \notin [a,b[$. Koeta yleistää avaruuteen ℓ^2 tai jopa yleiseen Hilbertin avaruuteen H.

29.5. Olkoon T_t kuten esimerkissä 3.3.6, ts.

$$T_t : H \to H : f \mapsto f \cdot \chi_{[0,t]},$$

missä $H = L^2[0,1]$. Osoita, että T on spektraaliparvi. Mikä on vastaava "diagonaalioperattori"

$$D = \int_0^{1+} \lambda \, dT_\lambda?$$

29.6. Määrää edellisen tehtävän operaattorin ominaisarvot. Mitä osaat sanoa sen spektristä?

29.7. Unitaarinen operaattori $U \in L(H)$ on aina muotoa

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\lambda \, d\mu_\lambda + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\lambda \, d\mu_\lambda.$$

Vihje. Lemma: On olemassa hermiittinen operaattori T siten, että

$$U = \exp(iT) = \cos T + i \sin T \quad \text{ja}$$
$$\mathrm{Sp}(T) \subset [-\pi, \pi]. \qquad \square$$

Huomautuksia lukuun X.

Per aspera ad astra? Kirjoittaja on puolittain tahallisesti salannut fysiikasta kiinnostuneelta lukijaltaan ongelman: normialgebra $\mathcal{B}$ ei sovellu kvanttimekaniikan malliksi. Vika on siinä, että kvanttimekaniikassa ovat keskeisessä roolissa operaattorien *kommutaattorit* $ST - TS$. Erityisesti tarvitaan tilannetta, jossa $ST - TS = I$. Mutta minkään Banach-algebran ykkösalkiota ei voi esittää kahden muun alkion kommutaattorina. Jos nimittäin olisi $ST - TS = I$, niin saataisiin

$$\begin{aligned} ST^n &= STT^{n-1} = (I + TS)T^{n-1} = T^{n-1} + TST^{n-1} \\ &= T^{n-1} + T^{n-1} + T^2ST^{n-2} = \dots \\ &= nT^{n-1} + T^nS. \end{aligned}$$

Tästä saataisiin normeille

$$(1) \qquad \|ST^n - T^nS\| = \|nT^{n-1}\| = n\|T^{n-1}\|.$$

Mutta vasen puoli on

$$(2) \quad \|STT^{n-1} - T^{n-1}TS\| \le \|STT^{n-1}\| + \|T^{n-1}TS\| = (\|ST\| + \|TS\|)\|T^{n-1}\|.$$

Yhdistämällä (1) ja (2) saataisiin ristiriita: $n \le (\|ST\| + \|TS\|)$ kaikilla n. $\square$

Ongelma ratkaistaan kvanttimekaniikassa sillä tavalla, että siirrytään tarkastelemaan epäjatkuvia operaattoreita. Jotta ei menetettäisi liikaa teoriaa vaaditaan kuitenkin, että kuvaaja on suljettu. Suljetun kuvaajan lauseen mukaan ei kylläkään Hilbert-avaruudessa ole epäjatkuvia operaattoreita, joiden graafi olisi suljettu. Tästä selvitään tyytymällä operaattoreihin, jotka eivät ole määriteltyjä koko Hilbert-avaruudessa, vaan ainoastaan sen tiheässä aliavaruudessa.

Kummastelua. On hyvin ihmeellistä, että numeroituvaulotteisella avaruudella voi olla ylinumeroituva määrä sisäkkäisiä suljettuja aliavaruuksia. Näin kuitenkin on.

Vaihtoehtoinen esitystapa hermiittisen operaattorin spektraaliesitykselle.[145] Olkoon T hermiittinen. Tällöin on olemassa "spektraalimitta" μ siten, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n \in \mathbf{N}$ ja luvut $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n < \infty$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\| T - \sum_{i=1}^{n} \mu[t_{j-1}, T_j] \|_{\mathcal{B}(H)} < \varepsilon.$$

Tässä *spektraalimitalla* μ tarkoitetaan kuvausta reaalilukujen Borel-joukoilta operaattorialgebraan $\mathcal{B}(H)$, siten että

(1) Jokainen $\mu(M)$ on ortogonaaliprojektio.
(2) $\mu(\emptyset) = 0$.
(3) $\mu(\mathbf{R}) = I$.
(4) $M_1 \cap M_2 = \emptyset \implies \mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$ (additiivisuus)
(5) $M_1 \cap M_2 = \emptyset \implies \mu(M_1)\mu(M_2) = 0$ (Vrt. 8.1.12.(2))
(6) $M_1 \subset M_2 = \mu(M_1) \leq \mu(M_2)$ projektioiden järjestyksen mielessä.

Kaiken tämän ilmaisee lyhyt kaava

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\mu_\lambda,$$

joka on sikälikin perusteltu, että kaikille $x, y \in H$ pätee

$$(Tx, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(\mu_\lambda x \,|\, y),$$

ja

$$(Tx, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\|\mu_\lambda x\|^2,$$

missä on merkitty lyhyesti $\mu_\lambda = \mu(-\infty, \lambda]$ ja integroinnit tapahtuvat "tavallisessa Lebesgue-Stieltjes-mielessä".

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun X.

[145] [He-S].

LIITE: VALINTA-AKSIOOMA, HYVINJÄRJESTYS JA KANTA

1. Valinta-aksiooman eri muotoja (∗)

Todistamme seuraavat lauseet ekvivalenteiksi valinta-aksiooman kanssa: Hausdorffin maksimaalisuusperiaate, Zornin lemma ja hyvinjärjestyslause. Muotoilemme väitteet sitä mukaa kuin todistus etenee. Aloitamme ehkä uskottavimmalla, ainakin vähiten määritelmiä sisältävällä: itse valinta-aksioomalla. Kovalla työllä todistamme siitä Hausdorffin maksimaalisuusperiaatteen ja silloin Zornin lemma, edelleen hyvinjärjestyslause ja lopulta paluu valinta-aksioomaan ovatkin pelkkää laskettelua alamäkeen.

Mainittakoon, että jo Georg Cantor käytti hyvinjärjestyslausetta ja Ernst Zermelo[146] todisti sen v. 1904 ekvivalentiksi samalla käyttöön ottamansa valinta-aksiooman kanssa. 1900-luvun alussa Hausdorff[147] käytti maksimaalisuusperiaatettaan. Uusin lauseista on Zornin lemma.

Valinta-aksioomasta esiintyy kirjallisuudessa myös versioita, jotka eivät ole esittämämme kanssa yhtäpitäviä mutta palvelevat kuitenkin samantapaisia tarkoituksia.

Aksiooma 1. (Valinta-aksiooma). *Joukkojen E_i, $i \in I$ karteesinen tulo*

$$\prod_{i\in I} E_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} E_i \mid f_i = f(i) \in E_i \,\forall i \in I\}$$

on aina epätyhjä, kun I ja jokainen E_i ovat epätyhjiä.

Sanomme karteesisen tulon alkioita tässä yhteydessä valintafunktioiksi.

Määritelmä 2. Joukon E relaatio "$\leq$" on *järjestys*, ja $(E, \leq)$ on *järjestetty joukko*, mikäli "$\leq$" toteuttaa ehdot:

(1) $x \leq x$ kaikille $x \in E$. (refleksiivisyys)
(2) Jos $x \leq y$ ja $y \leq z$ niin $x \leq z$. (transitiivisuus)
(3) Jos $x \leq y$ ja $y \leq x$ niin $x = y$. (antisymmetria)

Järjestys on *täydellinen*, mikäli lisäksi

(4) Kaikilla $x, y \in E$ pätee $x \leq y$ tai $y \leq x$.

Samaa on tapana ilmaista sanomalla, että $(E, \leq)$ on *täysin järjestetty joukko* eli *ketju*[148]. Esimerkiksi joukkojen inkluusio "$\subset$" on järjestys ja luonnollisten lukujen järjestys on täydellinen järjestys.

[146] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo 1871–1953, Saksa.
[147] Felix Hausdorff 1868–1942(!), Saksa.
[148] Samaa tarkoittavat myös "lineaarinen" ja "totaali" järjestys

MÄÄRITELMÄ 3. Olkoon $a \in E$ ja $\subset E$, missä $(E, \leq)$ on järjestetty joukko.

(1) a on A:n *yläraja*, mikäli $x \leq a \, \forall x \in A$.
(2) a on A:n *suurin alkio*, mikäli $x \leq a \, \forall x \in A$ ja lisäksi $a \in A$. (Vastaavasti määritellään *pienin* alkio.)
(3) a on A:n *supremum*, mikäli se on A:n ylärajojen joukon pienin alkio. Merkitsemme: $a = \sup A$.
(4) a on A:n *maksimaalinen alkio*, mikäli $\nexists x \in A : x > a$.
(5) $[a, \rightarrow] = \{x \in E \mid a \leq x\}$

Vastaavasti määritellään *alaraja*, *pienin alkio*, *infimum* ja *minimaalinen alkio*.

HUOMAUTUS 4. Mitään edellämainituista ei ole olemassa aina. Ollessaan olemassa suurin ja pienin alkio ovat yksikäsitteisiä, samoin siis $\sup A$ ja $\inf A$. Ylärajoja ja maksimaalisia alkioita on usein paljonkin.

LEMMA 5. (KIINTOPISTELEMMA). *Olkoon $(E, \leq)$ järjestetty joukko, jonka jokaisella epätyhjällä osaketjulla on supremum joukossa E ja olkoon $f : E \to E$ sellainen funktio, että*

$$\forall x \in E : f(x) \geq x.$$

Tällöin on olemassa f:n kiintopiste, eli ehdon $f(x) = x$ toteuttava $x \in E$.

TODISTUS. Valitaan aluksi kiinteä $a \in E$. Määritellään apukäsitteeksi (a:han liittyvä) *Hausdorff-joukko*, lyhyesti H-*joukko*, seuraavasti:
B on H-joukko, jos

(1) $a \in B$.
(2) $x \in B \implies f(x) \in B$, ts. $f(B) \subset B$.
(3) Jos $\emptyset \neq K \subset B$ on ketju, niin $\sup K \in B$.
(sup K on lemman oletuksen mukaan olemassa.)

Todistuksen ideana on näyttää kaksi asiaa: "kaikkien H-joukkojen leikkaus on täysin järjestetty H-joukko" ja "täysin järjestetty H-joukko sisältää kiintopisteen".

Huomataan aluksi, että E itse on H-joukko, joten kaikkien H-joukkojen joukko $\{B_i \mid i \in I\}$ on epätyhjä. Olkoon A kaikkien H-joukkojen leikkaus:

$$A = \bigcap_{i \in I} B_i.$$

On ilmeistä, että A on H-joukko ja tietysti inkluusion mielessä pienin sellainen. Toisaalta myös $[a, \rightarrow]$ on H-joukko. Siksi

$$A \subset [a, \rightarrow],$$

toisin sanoen

$$\forall x \in A \quad a \leq x.$$

Todistuksen pääosan muodostaa päättely, joka osoittaa, että

$$\forall x, y \in A : x \leq y \text{ tai } f(y) \leq x, \tag{1}$$

erityisesti A on siis täysin järjestetty.

Väite (1) merkitsee samaa[149] kuin

$$x \nleq y \implies f(y) \leq x.$$

Olkoon

$$P = \{x \in A \bigm| \forall y \in A : y < x \implies f(y) \leq x\}.$$

Tavoitteena on osoittaa, että myös P on H-joukko ja siis $P = A$. Tämän todistamisessa on varsinainen vaiva. Kaikilla $x \in P$ asetetaan

$$B_x = \{z \in A \bigm| z \leq x \quad \text{tai} \quad z \geq f(x)\}.$$

On rutiiniasia osoittaa, että jokainen B_x on H-joukko. Teemme sen täydellisyyden vuoksi:

(1)

$$\begin{aligned} x \in P &\implies x \in A, \\ \text{siis } x \in P &\implies a \leq x \\ a \in A \quad \text{ja} \quad a \leq x &\implies a \in B_x. \end{aligned}$$

(2) $z \in B_x \implies$ (joko $z \leq x$ tai $z \geq f(x)$). Käsittelemme nämä tapaukset erikseen.

(2a) Jos $z < x$, niin P:n määritelmän mukaan $f(z) \leq x$ ja siis $f(z) \in B_x$. Jos taas $z = x$, niin $f(z) = f(x) \geq f(x)$ ja siis tällöinkin $f(z) \in B_x$.

(2b) $z \geq f(x) \implies f(z) \geq z \geq f(x) \implies f(z) \geq f(x)$ ja siis $f(z) \in B_x$.

(3) Olkoon $K \subset B_x$ epätyhjä osaketju. Silloin K on myös H-joukon A epätyhjä osaketju ja siis $\sup K \in A$. Osoitetaan, että se kuuluu jo B_x:ään. Ainakin, jos x on K:n yläraja, niin $\sup K \leq x$ ja siis $\sup K \in B_x$. Jos taas x ei ole K:n yläraja, niin on olemassa $y \in K$ siten, että $y \nleq x$. Nyt $y \in K \subset B_x \implies y \leq x$ tai $y \geq f(x)$, joten $y \geq f(x)$. Mutta $y \leq \sup K$, joten $\sup K \geq f(x)$ ja siis $\sup K \in B_x$.

No niin: $A \subset B_x$. Olemme todistaneet, että pätee:

$$\begin{aligned} &x \in P \text{ ja } z \in A \implies z \in B_x, \text{ eli} \\ (2) \qquad &x \in P \text{ ja } z \in A \implies z \leq x \text{ tai } z \geq f(x). \end{aligned}$$

Tuloksen (2) avulla näytetään nyt, että P on H-joukko ja siis $P = A$.

(1) $a \in P$, sillä P:n määrittelevä ehto on triviaalisti voimassa a:lle.

(2) Osoitetaan, että $f(P) \subset P$. Olkoon $x \in P$. Tämä merkitsee, että

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\text{ja} \\ y \in A \text{ ja } y < x \implies &f(y) \leq x. \end{aligned}$$

Väitämme, että $f(x) \in P$, eli että

$$\begin{aligned} f(x) \in A \quad &\text{ja} \\ y \in A \text{ ja } y < f(x) \implies &f(y) \leq f(x). \end{aligned}$$

[149] Huomaa, että täydellisessä järjestyksessä on ”$x \nleq y \iff y < x$.

Ensimmäinen väite $f(x) \in A$ on selvästi tosi, koska A on H-joukko. Olkoon nyt $y \in A$ siten, että $y < f(x)$. On aika käyttää ehtoa (2). Sen mukaan $y \leq x$ tai $y \geq f(x)$, koska $x \in P$ ja $y \in A$. Oletimme, että $y < f(x)$, joten vaihtoehto $y \leq x$ toteutuu. Tapauksessa $y = x$ on tietysti $f(y) \leq f(x)$, kuten pitääkin. Tapauksessa $y < x$ päätellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(y) &\leq x, \text{ koska } x \in P \text{ ja } y \in A, \\ x &\leq f(x) \text{ aina }, \\ \text{siis } f(y) &\leq f(x). \end{aligned}$$

(3) Olkoon lopuksi K joukon P epätyhjä osaketju. Väitämme, että $\sup K \in P$. Väite merkitsee, että

$$\begin{gathered} \sup K \in A \quad \text{ ja} \\ y \in A \text{ ja } y < \sup K \implies f(y) \leq \sup K. \end{gathered}$$

Ainakin $K \subset P \subset A$ ja A on H-joukko, joten $\sup K \in A$. Toisen puolen toteamiseksi valitaan $y \in A$, jolle $y < \sup K$. On olemassa $x \in K$, jolle $x \not\leq y$. Käytämme toistamiseen ehtoa (2), joka nyt takaa, että

$$y \leq x \text{ tai } y \geq f(x).$$

Ensin mainittu tapaus implikoisi mahdottomuuden $y \geq f(x)$, joten $y \leq x$ ja itse asiassa $y < x$, sillä oletimme, että $y \not\leq x$. P:n määritelmän mukaan $f(y) \leq x$, mutta $x \in K \implies x \leq \sup K$, joten $f(y) \leq \sup K$, kuten pitikin.

Olemme todistaneet, että P on H-joukko ja siis

$$P = A.$$

Ehto (2) soveltuu siis kahteen A:n alkioon x ja y ja tavoitteemme

$$\forall x, y \in A : x \leq y \text{ tai } f(y) \leq x, \tag{1}$$

on saavutettu. A itse on siis täysin järjestetty eli ketju ja lisäksi epätyhjä.

On lopuksi vain huomattava, että H-joukkona A siis sisältää alkioidensa supremumin $x = \sup A \in A$, ja se on f:n kiintopiste, koska ehto $y \leq x \, \forall y \in A$ ja H-joukkoehto $f(x) \in A$ yhdessä antavat $f(x) \leq x$, mutta oletettiin, että aina $f(x) \geq x$. □

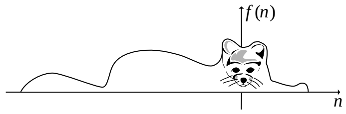
Lause 6 (Hausdorffin maksimaalisuusperiaate). *Oletamme seuraavassa, että valinta-aksiooma on voimassa.*

Jos K on järjestetyn joukon $(E, \leq)$ osaketju, niin on olemassa sitä laajempi E:n osaketju L, joka on inkluusion suhteen maksimaalinen.

Lause sanoo siis, että jokainen osaketju K sisältyy ainakin yhteen maksimaaliseen.

Todistus. Teemme vastaoletuksen, jonka mukaan on olemassa E ja sen osaketju K siten, että K ei sisälly mihinkään maksimaaliseen E:n osaketjuun. Olkoon

$$\mathcal{L} = \{L \subset E \mid K \subset L \,, \, L \text{ on } E\text{:n osaketju}\}.$$



Kaikilla $L \in \mathcal{L}$ on siis vastaoletuksemme mukaan joukko

$$\mathcal{L}_L = \{L' \subset E \mid L \subset L',\, L' \text{ on } E\text{:n osaketju}\}$$

epätyhjä, joten valinta-aksiooman nojalla on olemassa valintafunktio $f \in \prod_{L\in\mathcal{L}} \mathcal{L}_L$. Tämä tarkoittaa, että on olemassa funktio

$$f : L \to \bigcup_{L\in\mathcal{L}} \mathcal{L}_L \subset \mathcal{L}$$

siten, että kaikilla $L \in \mathcal{L}$: $f(L) \in \mathcal{L}_L$, eli f on inkluusion mielessä kasvava funktio:

$$L \subset f(L).$$

Kuvauksen f kiintopiste on etsimämme maksimaalinen ketju. Sen olemassaolon takaa kiintopistelemma 5, sillä ehdot ovat voimassa: f on kasvava ja jokaisella epätyhjällä osaketjulla $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ on supremum $\mathcal{L}$:ssä, nimittäin alkioidensa yhdiste. □

Lause 7 (Zornin lemma). *Olkoon $(E, \leq)$ järjestetty joukko, jonka jokaisella epätyhjällä osaketjulla on yläraja joukossa E. Silloin itse E :ssä on olemassa ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Todistus. Todistamme, että Hausdorffin maksimaalisuusperiaatteesta 6 seuraa jopa, että kaikilla $a \in E$ on olemassa maksimaalinen $b \in E$ siten, että $a \leq b$.

Olkoon siis $a \in E$. Varmasti $\{a\}$ on E:n epätyhjä osaketju, joten Hausdorffin maksimaalisuusperiaatteen nojalla on olemassa maksimaalinen osaketju $K \supset \{a\}$. Nyt siis $a \in K$. Oletuksen nojalla K:lla on yläraja joukossa E. Olkoon se b. Osoitamme nyt helposti, että tämä b kelpaa. Ainakin ehto $a \leq b$ on voimassa. Maksimaalisuustodistuksen aluksi taas huomataan, että

$$b \in K.$$

Tämä johtuu siitä, että myös joukko $L = \{b\} \cup K$ on E:n osaketju, vieläpä K:n sisältävä. Koska kuitenkin K on maksimaalinen, on siis $L = K$ ja $b \in K$. Siis b on maksimaalisen osaketjun K suurin alkio. Tästä kyllä seuraa, että b on koko E:n maksimaalinen alkio, jollaisen olemassaoloa olemme todistamassa. Jos nimittäin olisi olemassa sitä aidosti suurempi alkio, vaikkapa

$$y > b,$$

niin liittämällä y joukkoon K saataisiin sitä inkluusion mielessä aidosti suurempi osaketju

$$L' = K \cup \{y\} \supsetneq K,$$

vastoin K:n maksimaalisuutta. Zornin lemma seuraa siis Hausdorffin maksimaalisuusperiaatteesta. □

Huomautus 8. Seuraava lause sanoo, että "mikä tahansa joukko voidaan "järjestää hyvin". Tarvitsemme ilmeisesti määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 9. Järjetetty joukko $(E, \leq)$ on *hyvin järjestetty*, mikäli sen jokaisessa epätyhjässä osajoukossa on pienin alkio.

Esimerkiksi luonnollisten lukujen järjestys on hyvä, mutta reaalilukujen tavallinen järjestys ei ole hyvä. Luonnollisesti jokainen hyvin järjestetty joukko on ketju eli täysin järjestetty.[150]

LAUSE 10 (HYVINJÄRJESTYSLAUSE). *Jokaisella joukolla on ainakin yksi hyvä järjestys.*[151]

TODISTUS. Tyhjä joukko on triviaalisti hyvin järjestetty, joten voimme olettaa, että $E \neq \emptyset$.

Todistusideana on käyttää Zornin lemmaa E:n hyvin järjestettyjen osajoukkojen joukossa

$$\mathcal{F} = \{(A, \leq_A) \bigm| \emptyset \neq A \subset E, \text{"} \leq_A \text{"on jokin hyvä järjestys } A\text{:ssa}\},$$

joka on varustettu luonnollisella järjestysrelaatiolla:

$$(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B) \iff \begin{cases} A \subset B, \\ \text{relaatiot } \leq_A \text{ ja } \leq_B \text{ yhtyvät } A\text{:ssa ja} \\ B \setminus A\text{:n alkiot ovat } \leq_B -\text{mielessä} \\ \qquad \text{suurempia kuin } A\text{:n.} \end{cases}$$

On helppo nähdä, että $(\mathcal{F}, \leq)$ on järjestetty joukko. Pelkkää verifiointia on myös näyttää, että Zornin lemman ehto täyttyy, eli että sen jokaisella epätyhjällä osaketjulla on yläraja. Teemme sen silti:

(1) Olkoon $\mathcal{G}$ joukon $\mathcal{F}$:n epätyhjä osaketju. On luonnollista yrittää sen ylärajaksi sen alkioiden yhdistettä

$$Y = \bigcup \mathcal{G}$$

varustettuna itsestään ehdokkaaksi tarjoutuvalla järjestysrelaatiolla

$$x \leq_Y y \iff (x, y \in A \text{ ja } x \leq_A y \quad \text{jollekin } A \in \mathcal{G}).$$

Kaikille x ja $y \in Y$ on tosiaan olemassa molemmat sisältävä $A \in \mathcal{G}$, koska $\mathcal{G}$ on myös inkluusion mielessä ketju. Lisäksi ilmeisesti

$$x \leq_Y y \iff (x \leq_A y \quad \text{jokaiselle } A \in \mathcal{G}, \text{ jolle } x, y \in A).$$

(2) Relaatio "$\leq_Y$" on selvästikin järjestys joukossa Y.

(3) Tarkastamme vielä, että "$\leq_Y$" on nimenomaan hyvä järjestys joukossa Y. Otetaan tarkasteltavaksi Y:n epätyhjä osajoukko B ja muistetaan, että tavoitteena on löytää siitä pienin alkio. Koska Y on perheeseen G kuuluvien joukkojen yhdiste, on olemassa $A \in \mathcal{G}$ siten, että

$$B \cap A \neq \emptyset.$$

[150] Hyvin järjestetyssä joukosa on mahdollista harrastaa induktiotodistusta, ns. *transfiniittista induktiota*, jossa induktio-oletuksen tosin kussakin askelessa täytyy päteä kaikille tutkittavaa aikaisemmille alkioille.

[151] Koetapa vain keksiä sellainen reaaliluvuille!

Joukossa $B \cap A$ on hyvän järjestyksen $\leq_A$ mielessä pienin alkio, olkoon se b. Näytetään, että b kelpaa etsimäksemme alkioksi, eli että b on B:n pienin alkio järjestyksen $\leq_Y$ mielessä. Verrataan sitä mielivaltaiseen B:n alkioon x seuraavalla tavalla:

a) Jos $x \in B \cap A$, niin $b \leq_A x$ ja siis $b \leq_Y x$.

b) Jos $x \notin B \cap A$, ja siis $x \notin A$, niin on kuitenkin olemassa toinen G:n alkio, vaikkapa A', siten että $b \in A'$. Tämä A' ei tietenkään voi olla A:n osajoukko, vaan se sisältää A:n — toinenhan sisältää varmasti toisen, koska $\mathcal{G}$ on inkluusionkin mielessä ketju. Nyt siis

$$(*) \qquad b \in A \text{ ja } x \in A' \setminus A.$$

Koska $\mathcal{F}$:n järjestyksen mielessä on $A \leq A'$, niin kaavasta $(*)$ seuraa $b \leq_Y x$ myös tässä tapauksessa. Tätä väitettiin.

(4) On lopuksi selvää, että $(, \leq_Y)$ on $\mathcal{G}$:n yläraja.

Zornin lemman ehto on siis voimassa ja voimme päätellä, että joukossa $(\mathcal{F}, \leq)$ on maksimaalinen alkio, olkoon se $(M, \leq_M)$. Joukon E hyvä järjestys on löytynyt, mikäli M on inkluusion mielessä maksimaalinen, eli $M = E$. Joka tapauksessa $M \subset E$, joten antiteesi on $E \setminus M \neq \emptyset$. Olkoon siis $x \in E \setminus M$. Järjestetään joukko $M \cup \{x\}$ sopimalla x sen suurimmaksi alkioksi. Tämä on selvästi hyvä järjestys vastoin M:n maksimaalisuutta. $\square$

HUOMAUTUS 11. Hyvin järjestetyssä joukossa on jokaisella alkiolla x yksikäsitteinen välitön *seuraaja*, siis pienin x:ää suurempi alkio, mutta ei aina *edeltäjää.* Esimerkin tästä tarjoaa luonnollisesti koko hyvinjärjestetyn joukon pienin alkio, esimerkiksi luonnollisten lukujen ykkönen, mutta ei muillakaan alkioilla tarvitse olla edeltäjää: vaikkapa hyvin järjestetty joukko

$$1 \leq 2 \leq \cdots \leq 1' \leq 2' \leq \ldots$$

sisältää myös edeltäjättömän alkion 1'.

Cantorin joukko-oppi on paljolti joukkojen mahtavuuden eli *kardinaalilukujen* tutkimista. Joukothan ovat isomorfisia joukkoina, mikäli niillä on sama mahtavuus. Toinen puoli joukko-oppia on ns. *ordinaalilukujen* teoriaa. Ordinaaliluvut ovat hyvin järjestettyjen joukkojen ekvivalenssiluokkia järjestysisomorfismin mielessä.

LAUSE 12. *Hyvinjärjestyslauseesta seuraa valinta-aksiooma.*

TODISTUS[152]. Olkoon

$$\{E_i\}_i \in I$$

epätyhjä parvi epätyhjiä joukkoja. Hyvinjärjestämme aluksi yhdisteen

$$\bigcup_{i \in I} E_i.$$

Jokaisella sen epätyhjistä osajoukoista E_i on pienin alkio. Määritellään valintakuvaus

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} E_i : f_i = E_i\text{:n pienin alkio.}$$

[152]Metodi: Hyvinjärjestä kaikki mihin pääset käsiksi.

Muuta ei tarvita. □

HUOMAUTUS 13. Emme edellä ole tietenkään todistaneet oikeaksi mitään valinta-aksiooman muotoa. Olemme vain näyttänet niiden olevan voimassa joko kaikkien tai ei minkään, olettaen sitä paitsi implisiittisesti tukun joukko-opin muita aksioomia asiaa sen kummemmin ihmettelemättä. Onko esimerkiksi Zornin lemma sitten tosi vai ei? Tämä kysymys oli ensimmäisenä sillä kuuluisalla avointen matemaattisten ongelmien listalla, jonka Hilbert esitti vuonna 1900. Ratkaisu on yllättävä. Vuonna 1940 KURT GÖDEL onnistui todistamaan, että valinta-aksiooma ei ainakaan ole ristiriidassa joukko-opin muiden aksioomien kanssa. Myöhemmin vuonna 1963 PAUL COHEN osoitti, että valinta-aksioomaa ei myöskään voi todistaa oikeaksi lähtemällä muusta joukko-opista.[153] Voimme siis joko hyväksyä tai hylätä sen. Itse asiassa matematiikkaa tehdäänkin joskus ilman valinta-aksioomaa ja joskus taas silläkin tavalla, että käytetään jotakin aksiooman lievempää muotoa, esimerkiksi sellaista, että numeroituvan monen epätyhjän joukon karteesinen tulo on epätyhjä.

Tämä on yksi kolmesta kuuluisasta riippumattomuustodistuksesta. Eukleideen paralleelliaksiooman riippumattomuuden muusta geometriasta esitti BOLYAI ensimmäisenä julkisesti n. 1830 ja alustavan todistuksen antoi BELTRAMI 1868. Lopullisen todistuksen esitti KLEIN 1871.[154] Kolmas riippumattomuustulos on kontinuumihypoteesin riippumattomuus muusta joukko-opista — valinta-aksiooma mukaan lukien. Kontinuumihypoteesi sanoo, että ei ole olemassa joukkoa, joka olisi mahtavuudeltaan aidosti kokonaislukujen ja reaalilukujen välissä. Tämänkin väitteen riippumattomuuden muista osoitti P. Cohen. Geometria-asia on aika helppo, mutta joukko-opin riippumattomuustodistukset edellyttävät matemaattisen logiikan tietoja.

2. Hamelin kanta

MÄÄRITELMÄ 14. Joukko vektoriavaruuden V vektoreita on *lineaarisesti riippumaton* eli *vapaa*, mikäli jokainen sen äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippumaton tavallisessa mielessä.

MÄÄRITELMÄ 15. Joukon $A \subset V$:n *virittämä vektorialiavaruus* on sen alkioiden lineaarikombinaatioiden joukko

$$\langle A\rangle = \big\{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \;\big|\; x_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Sanomme, että A *virittää* aliavaruuden $\langle A\rangle$.

Huomaa, että $\langle A\rangle$ on suppein A:n sisältävistä V:n aliavaruuksista, siis niiden kaikkien leikkaus.

MÄÄRITELMÄ 16. Vapaa eli lineaarisesti riippumaton joukko on *virittämänsä vektorialiavaruuden kanta* eli tarkemmin sanoen sen *Hamel-kanta*[155]. Erityisesti sellainen vapaa joukko, joka virittää koko vektoriavaruuden V, on koko avaruuden Hamel-kanta.

[153] KURT GÖDEL 1906 - 1978, Itävalta-Unkari – USA ja PAUL COHEN 1934- , USA.

[154] JÁNOS BOLYAI 1802–1860, Romanian unkarilainen. EUGENIO BELTRAMI 1835–1900, Italia. FELIX CHRISTIAN KLEIN 1849–1925, Saksa.

[155] GEORG HAMEL 1877–1954, Saksa.

Lause 17. *Joukolle $A \subset V$ seuraavat ovat yhtäpitäviä*

(1) *A on V:n Hamel-kanta.*
(2) *A on inkluusion mielessä maksimaalinen lineaarisesti riippumaton joukko V:n vektoreita.*
(3) *A on minimaalinen V:n virittävä joukko.*

Lause 18. *Kaikki avaruuden V Hamel-kannat ovat yhtä mahtavia. Niiden mahtavuus on avaruuden V lineaarialgebrallinen eli Hamelin dimensio.*

Perustelu. Tämä on todistettava erilailla kuin vastaava Hilbert-kannan lause. Koeta keksiä todistus itse! $\square$

Lause 19. *Jokaisella vektoriavaruudella on olemassa Hamel-kanta.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{K}$ V:n niiden aliavaruuksien joukko, joilla on kanta — inkluusiolla järjestettynä. Sen epätyhjällä osaketjulla on ylärajanaan alkioidensa yhdiste. Zornin lemman mukaan siis on olemassa maksimaalinen kannallinen aliavaruus. Tämä on kuitenkin välttämättä koko V, koska aidon kannallisen aliavaruuden W voisi laajentaa sitä aidosti suuremmaksi kannalliseksi aliavaruudeksi $\langle W \cup \{x\} \rangle$, missä $x \in V \setminus W$. $\square$

Huomautus 20. Hamelin kannan olemassaolo on algebrallinen tosiasia; vektoriavaruus V saa olla $k-$kertoiminen millä tahansa kunnalla k.

Hamelin kannalla $A \subset V$ on pitkälti samat ominaisuudet kuin äärellisulotteisen avaruuden kannallakin. Ennen kaikkea voidaan jokainen V:n vektori lausua tasan yhdellä tavalla äärellisenä lineaarikombinaationa Hamel-kantavektoreista $h \in A$:

$$x = \sum_{h \in A} \alpha_h h,$$

missä vain äärellisen moni luvuista α_h eli *Hamel-koordinaateista* on nollasta eroava.

Myös voidaan jokainen lineaarisesti riippumaton joukko, mikä on sama asia kuin aliavaruuden Hamel-kanta, laajentaa koko avaruuden kannaksi. Tämä todistetaan kuten Hamel-kannan olemassaolo.

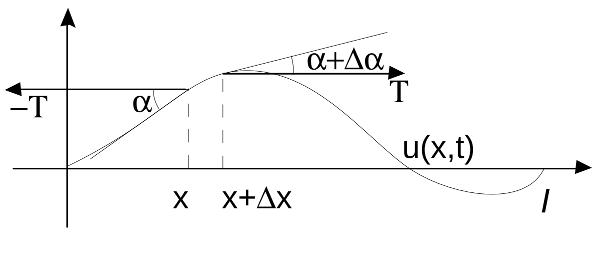
Mikä tahansa Hamel-kannan jako erillisiin osiin tuottaa koko avaruuden jaon kannan osien virittämien *aliavaruuksien yleistetyksi suoraksi summaksi*, toisin sanoen näiden aliavaruuksien yhdiste virittää koko avaruuden ja aliavaruudet leikkaavat parittain toisiaan vain origossa.

LIITE: FOURIER-SARJOJEN SOVELLUS TAVALLISIIN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIHIN (∗)

Ari Lehtonen

1. Värähtelevän jousen differentiaaliyhtälö

Aaltoyhtälön johto. Olettakaamme, että meillä on lanka jännitettynä kahden kiinteän tukipisteen välille, ja että jännitys on niin suuri, että langan paino voidaan jättää huomiotta. Lanka olkoon tasapainoasemassaan $x-$akselilla kiinnitettynä pisteistä $x = 0$ ja $x = l$. Kun lankaa eli jousta poikkeutetaan tasapainoasemastaan xy-tasossa, se alkaa värähdellä. Kuvatkoon $f(x)$ jousen poikkeamaa tasapainotilasta hetkellä $t = 0$ ja vastaavasti $u(x, t)$ poikkeamaa ajanhetkellä t. Siis $f(x) = u(x, 0)$.



Kuva 78. Värähtelevä jousi.

Oletetaan, että jousen tiheys ρ on vakio, ja että jousta vaakasuoraan kiristävä jännitys T on myös vakio. Olkoon x jokin kiinteä kohta ja tarkastellaan pienen hiukkasen — jousen osan välillä $x, x + \Delta x$ — värähdysliikettä. Sen pystysuuntainen kiihtyvyys on $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, joten pystysuoran voiman komponentti on $\rho\Delta x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Tämän kiihtyvyyden aiheuttaa jousen jännityksen aiheuttama tasapainotilaan suuntaava voima. Tämä voima syntyy välin $(x, x+\Delta x)$ eri päihin vaikuttavien voimien erosta; jännityksen pystysuoraat komponentit eri päissä eroavat toisistaan. Jos α on jouselle pisteeseen x piirretyn tangentin ja $x-$akselin välinen kulma, niin $\tan\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Pisteissä x ja $x+\Delta x$ vaikuttavien jännitysten pystysuorien komponenttien $F(x)$

ja $F(x+\Delta x)$ erotus on

$$\begin{aligned}\Delta F &= -F(x) + F(x+\Delta x)\\ &= -T\sin\alpha + T\sin(\alpha+\Delta\alpha)\\ &= -T\sin\alpha + T\sin\alpha\cos\Delta\alpha + T\sin\Delta\alpha\cos\alpha\\ &\sim T\Delta\alpha,\end{aligned}$$

sillä $\alpha \sim 0$. Toisaalta $(1+\tan^2\alpha)\Delta\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x}(\tan\alpha)\Delta x = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$, joten $\rho\Delta x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$, sillä $1+\tan^2\alpha \sim 1$. Siis u toteuttaa *yksiulotteisen aaltoyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Alku- ja reunaehtojen johto. Jousi oletetaan päistään kiinnitetyksi $u(0,t) = u(l,t) = 0$ ja lähtee liikkeelle jostain asennosta: $u(x,0) = f(x)$.

2. Muuttujien separoiminen

Määrätään värähtelevän jousen yhtälölle ainakin muodollisesti ratkaisu. Funktion u toteuttaman aaltoyhtälön kirjoitamme nyt muotoon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (0 < x < l,\ t > 0) \tag{2.1}$$

reunaehdot

$$u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0 \tag{2.2}$$

ja alkuehdot

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{(jousen muoto tunnetaan alkuhetkellä)} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{(alkunopeus on nolla).} \tag{2.4}$$

Etsimme ratkaisua muodossa $u(x,t) = v(x)w(t)$. Tällöin v ja w toteuttavat yhtälön

$$v(x)w''(t) = a^2 v''(x)w(t).$$

eli

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{a^2 w(t)}.$$

Tämän yhtälön vasen puoli on vain x:n funktio ja oikea puoli on vain t:n funktio, joten yhtälö toteutuu ainoastaan, kun kumpikin on vakio. Olkoon se vakio $-\lambda$. Yhtälö on korvautunut yhtälöillä

$$v''(x) = -\lambda v(x) \tag{2.5}$$

$$w''(x) = -\lambda a^2 w(x) \tag{2.6}$$

Reunaehdoista (2.2) saadaan funktiolle v ehdot $v(0) = 0$, $v(l) = 0$. Jos $\lambda = 0$, niin on $v''(x) = 0$, joten siinä tapauksessa $v(x) = \alpha x + \beta$.

Jos $\lambda = 0$, niin $v'' = 0$, joten $v(x) = \alpha x + \beta$. Koska $v(0) = v(l) = 0$, on $\alpha = \beta = 0$, joten $v = 0$. Mutta nollafunktio ei toteuta ehtoa (2.2), ellei myös alkutilannetta kuvaava f ole 0.

Jos $\lambda < 0$, asetetaan $\mu = \sqrt{-\lambda}$ Tällöin yhtälön (2.5) ratkaisut ovat muotoa

$$v(x) = \alpha \sinh \mu x + \beta \cosh \mu x, \quad \alpha, \beta \text{ vakioita}$$

Koska $v(0) = 0$, on $\beta \cosh \mu 0 = \beta = 0$. Toisaalta ehdosta $0 = v(l) = \alpha \sinh \mu l$ seuraa $\alpha = 0$, joten myös tässä tapauksessa nollafunktio on ainoa ratkaisu eikä sekään kelpaa nollasta eroavalle f.

Jäljellä olevassa tapauksessa $\lambda > 0$ merkitään $\mu = \sqrt{\lambda}$. Tällöin yhtälön (2.5) ratkaisut ovat muotoa

$$v(x) = \alpha \sin \mu x + \beta \cos \mu x, \quad \alpha, \beta \text{ vakioita}$$

Ehdosta $v(0) = 0$ seuraa taas $\beta = 0$. Vastaavasti ehdosta $v(l) = 0$ seuraa $\alpha \sin \mu l = 0$. Tämä toteutuu, jos $\alpha = 0$ (jolloin olisi taas $u = 0$) tai sitten $\sin \mu l = 0$, ts.

$$\mu = \frac{n\pi}{l}, \quad \pi \in \mathbb{Z},$$

eli $\lambda = \mu^2 = n^2\pi^2/l^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Olkoon nyt $\lambda = \mu^2 = n^2\pi^2/l^2$, missä $n \in \mathbb{Z}$ on jokin kokonaisluku. Funktio w toteuttaa yhtälön

$$w''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2} w(t) = 0$$

ja ehdon (2.4) perusteella $w'(0) = 0$. Ratkaisuksi saadaan

$$w(t) = \gamma \cos \frac{n\pi a}{l} t, \quad \gamma \text{ vakio.}$$

Siis alkuperäisen differentiaaliyhtälön toteuttaa ainakin jokainen funktio

$$u_n(x,t) := \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l},$$

joka toteuttaa ehdot (2.3) ja (2.4). Alkuehdon (2.3) toteutuminen johtaa seuraavan kohdan tarkasteluihin.

Fourier-kertoimet.

Myös jokainen saamistamme ratkaisuista muodostettu lineaarikombinaatio

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}$$

on värähtelyongelman ehdot (2.1) ja (2.4) toteuttava ratkaisu. Jos sarjan saa derivoida termeittäin, myös ääretön summa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \tag{2.7}$$

on ratkaisu. Ehto (2.3) saa nyt muodon

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\frac{n\pi x}{l}=f(x)\quad \forall\, x\in(0,l). \tag{2.8}$$

Tiedämme, että jos $f\in L^2[0,l]$, niin kertoimet voi valita siten, että sarja suppenee L^2-mielessä, ja että tällöin kerroinjono (α_n) kuuluu jonoavaruuteen ℓ^2. Sinifunktioiden

$$\sin\frac{n\pi x}{l}$$

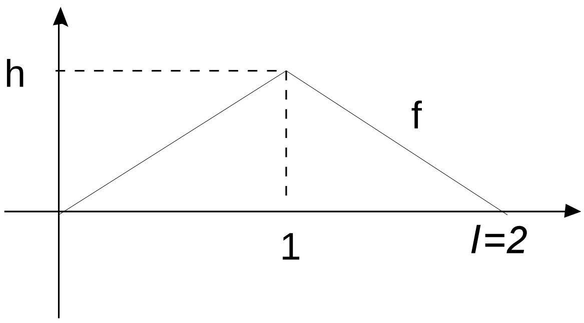
ortogonaalisuudesta avaruudessa $L^2[0,l]$ saadaan Fourier-kertoimille lauseke

$$\alpha_n=\frac{\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx}=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Pitäisi siis pohtia, milloin sarjan (2.7) saa derivoida termeittäin. Tätä selvitämme seuraavassa kohdassa. Tarkastelemme ensin muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 1. Olkoon $l=2$, $h>0$ ja

$$f(x)=\begin{cases} hx, \text{ kun } 0\le x\le 1\\ -hx+2h, \text{ kun } 1\le x\le 2.\end{cases}$$



Kuva 79. Liikkeen alkutila.

Kertoimiksi saadaan esimerkiksi osittaisintegroimalla

$$\alpha_n=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{jos } n \text{ on parillinen}\\ \frac{(-1)^k 8h}{(2k+1)^2\pi^2}, & \text{jos } n=2k+1,\ k\in\{0\}\cup\mathbb{N}.\end{cases}$$

Tehtävän (2.1)–(2.4) ratkaisu on siis

$$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2}. \tag{2.9}$$

Saatu funktio on jatkuva. Tämän voi todeta Weierstrassin M-testillä: sarjallahan on majoranttina suppeneva sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

joten $u(x,t)$:n sarja suppenee itseisesti ja tasaisesti. Termeittäin derivoimalla saadun sarjan suppeneminen tai hajaantuminen sen sijaan ei ole selvää.

Tarkastellaan ratkaisua (2.7) lähemmin. Koska

$$2\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} = \sin\frac{n\pi(x+at)}{l} + \sin\frac{n\pi(x-at)}{l},$$

saadaan

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}\alpha_n \sin\frac{n\pi(x+at)}{l} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}\alpha_n \sin\frac{n\pi(x-at)}{l}.$$

Määritellään funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$F(x) = \sum_{n=1}\alpha_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Nyt

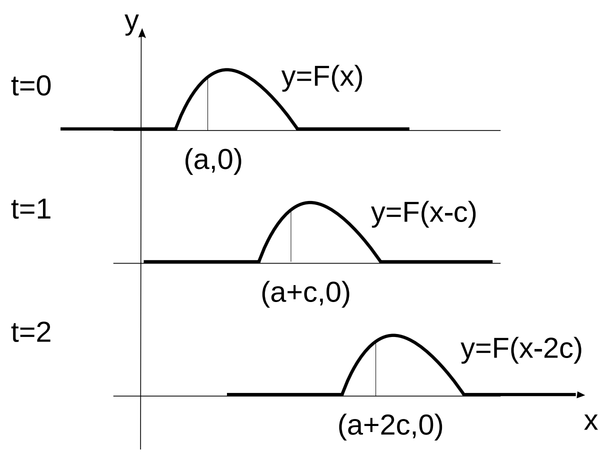
$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(F(x+at) + F(x-at)\right).$$

Funktio F on f:n pariton $2l-$jaksoinen laajennus koko reaaliakselille, ts.

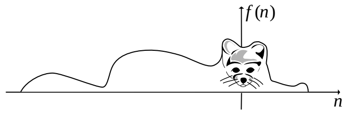
$$\begin{aligned} F(x) &= f(x), \qquad \text{kun } 0 < t < l,\\ F(x) &= -F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\\ F(x+2l) &= F(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kun tätä sovelletaan ratkaisuun (2.9), todetaan että u on jopa molempien muuttujiensa suhteen kahdesti derivoituva lukuunottamatta pisteitä, joissa $x \pm at = \frac{l}{2} + kl,\ k \in \mathbb{Z}$.

Huomautus 2. Funktiot $F(x+at)$ ja $F(x-at)$ ovat molemmat aaltoyhtälön ratkaisuja kunhan F on kahdesti derivoituva. Näiden merkitys selviää tarkasteltaessa niiden kuvaajia x:n funktioina muuttujan t eri arvoilla.



Kuva 80. Aaltoliikkeet.



Funktion $x \mapsto F(x-at)$ kuvaaja on funktion $x \mapsto F(x)$ kuvaaja siirrettynä at:n verran positiivisen x-akselin suuntaan. Vastaavasti funktion $x \mapsto F(x+at)$ kuvaaja on F:n kuvaaja negatiiviseen suuntaan siirrettynä.

Funktio F on aallonmuoto ja funktio $x \mapsto F(x-at)$ (vast. $x \mapsto F(x+at)$) esittää $x-$ akselin positiiviseen (vast. negatiiviseen) suuntaan nopeudella a etenevää aaltoa.[156]

3. Värähtelevä jousi, jonka alkunopeus tunnetaan

Nyt tutkimme värähtelevää, päistään kiinnitettyä jousta, joka alkuhetkellä on $x-$akselilla ja jonka liikkeen alkunopeus tunnetaan. Aaltoyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (0 < x < l,\, t > 0)$$

ja reunaehtojen

$$u(0,t) = u(l,t)$$

lisäksi ratkaisu toteuttaa alkuehdot

$$u(x,0) = 0 \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

Muuttujien separointi eli *erottaminen* on yrite $u(x,t) = v(x)w(t)$. Se johtaa edellä kuvattuun omiaisarvotehtävään, jonka ratkaisuina saatiin $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $v(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$. Toinen tekijä w toteuttaa tälläkin kertaa differentiaaliyhtälön

$$w''(x) = \lambda a^2 w(x), \tag{2.6}$$

mutta nyt alkuehtona on $w(0) = 0$ ja siis $w(t) = \sin\frac{n\pi a t}{l}$. Aaltoyhtälön separoimalla saatu ratkaisu on siis nyt muotoa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi a t}{l},$$

missä kertoimet α_n on nyt määrättävä siten, että alkuehto

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

toteutuu, ts.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = g(x).$$

Funktioiden $\sin\frac{n\pi x}{l}$ ortogonaalisuusehdoista saadaan tällä kertaa

$$\alpha_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

[156] Nopeus: $x \pm at$=vakio $\implies \frac{dx}{dt} = \mp a$.

Merkitään

$$\gamma_n = \tfrac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Tällöin

$$u(x,t) = \frac{l}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

Koska

$$2\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l} = \cos\frac{n\pi(x-at)}{l} - \cos\frac{n\pi(x+at)}{l},$$

voidaan kirjoittaa

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\left(H(x+at) - H(x-at)\right),$$

missä $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(x) = -\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Koska

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

saadaan integroimalla termeittäin

$$\int_0^x g(x) = -\tfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{l} + \text{vakio}.$$

Funktio H on siis g:n $2l$-jaksoisen, parittoman laajennuksen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integraali:

$$H(x) = \int_0^x G(t)\,dt.$$

Yleinen tilanne.

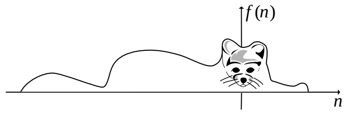
Yhdistämällä tämä ratkaisu aiempaan nähdään, että funktio

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}(F(x+at) + F(x-at)) + \tfrac{1}{2a}(H(x+at) - H(x-at))$$

on tehtävän

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
u(0,t) &= u(l,t) = 0\\
u(x,0) &= f(x)\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(t)
\end{aligned}$$

ratkaisu.



4. Pakotetut värähtelyt

Värähtelevä jousi, johon vaikuttaa ulkoinen voima $p(x,t)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t). \quad (0 < x < l,\ 0 < t) \tag{4.1}$$

Oletetaan, että jousi on päistään kiinnitetty, so.

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Jos $p(x,t) = 0$, niin kyseessä on vapaa värähtely, jolloin

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{4.2}$$

jossa $u_n(t) = \gamma_n \cos \frac{n\pi a t}{l}$ tai $u_n(t) = \gamma_n \sin \frac{n\pi a t}{l}$ tai näiden lineaarikombinaatio alkuehdoista riippuen. Kun $p(x,t)$ ei ole identtisesti 0, esitetään p Fourier-sarjana

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

ja pyritään määräämään kertoimet u_n niin, että funktio (4.2) on (4.1):n ratkaisu. Muodollisesti termeittäin derivoimalla saadaan u_n:lle yhtälö

$$u_n''(t) = -\lambda_n u_n(t) + p_n(t),$$

jossa $\lambda_n = a^2 n^2 \pi^2 / l^2$. Tämän yleinen ratkaisu on

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin\left(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\right) p_n(\tau)\, d\tau + \alpha_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \beta_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

jossa α_n ja β_n ovat vakioita. Ne määrätään alkuehdoista

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n(0)}_{\alpha_n} \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n'(0)}_{\sqrt{\lambda_n}\beta_n} \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x).$$

HUOMAUTUS 3. Jos pakotusvoima on ajasta riippumaton, $p = p(x)$, niin voidaan menetellä yksinkertaisemminkin. Pyritään löytämään funktio $q = q(x)$ siten, että funktio $v(x,t) = u(x,t) - q(x)$ toteuttaa vapaan värähtelyn aaltoyhtälön

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Funktion q tulee siis toteuttaa $q''(x) + p(x) = 0$. Funktiolle v saadaan reunaehdot

$$v(0,t) = u(0,t) - q(0) = -q(0)$$
$$v(l,t) = u(l,t) - q(l) = -q(l).$$

Jos vaaditaan, että $q(0) = q(l) = 0$, niin v toteuttaa vapaan jousen yhtälön sidotuin päätepistein. Funktio q tulee näillä ehdoilla yksikäsitteisesti määrätyksi ja $u(x,t) = v(x,t) + q(x)$.

5. Ominaisarvot ja -funktiot

Värähtelevän jousen osittaisdiferentiaaliyhtälöä ratkaistessamme jouduimme seuraavaan elliptiseen reuna-arvotehtävään:

$$\begin{cases} -v'' = \lambda v & \text{välillä } (0,l) \\ v = 0 & \text{reunalla } \{0,1\}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Tällä tehtävällä on aina triviaaliratkaisu $v = 0$. Kappaleessa 3 todettiin, että tehtävällä on myös nollasta eroavia ratkaisuja v **tietyillä arvoilla** $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällaisia arvoja kutsutaan reuna-arvotehtävän *ominaisarvoiksi* ja funktioita $v \neq 0$, jotka toteuttavat reuna-arvotehtävän, *ominaisfunktioiksi*. Yleistäkäämme tätä ideaa.

Olkoon L elliptinen differentiaalioperaattori alueessa Ω ja olkoon B reunadifferentiaalioperaattori. Tällöin reuna-arvotehtävän

$$\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{:ssa} \\ Bu = g & \text{reunalla } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

ominaisarvotehtävä on

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \Omega\text{:ssa} \\ Bu = 0 & \text{reunalla } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

Jos tehtävällä (5.3) on ratkaisu $u \neq 0$, niin sanotaan, että u on (5.3):n *ominaisfunktio* ja λ vastaava *ominaisarvo*.

Esimerkki 4. Kappaleessa 3 todettiin, että ominaisarvotehtävällä

$$\begin{cases} v'' = -\lambda v \text{ välillä } (0,l) \\ v = 0 \text{ reunalla } \{0,l\} \end{cases}$$

on ominaisarvot $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ja ominaisfunktiot

$$v(x) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Muita ei ole.

Esimerkki 5. Määrätään *Dirichlet'n tehtävän*[157]
ominaisarvot suorakulmiossa $\Omega = (0,a) \times (0,b)$, ts. ratkaistaan osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u & \Omega\text{:ssa} \\ u = 0 & \text{reunalla } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

Erotetaan taas muuttujat: $u(x,y) = v(x)w(y)$. Tällöin saadaan

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)} = -\lambda,$$

[157] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805–1859, Saksa

joten on olemassa vakio μ siten, että

$$\begin{cases} -v''(x) = \mu v \\ v(0) = v(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -w'' = (\lambda - \mu) w \\ w(0) = w(b) = 0 \end{cases}$$

Nämä yhtälöt ratkaistaan samaan tapaan kuin kappaleessa 3. Tuloksena saadaan

$$\begin{cases} \mu = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ v(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda - \mu = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ w(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}. \end{cases}$$

Siis

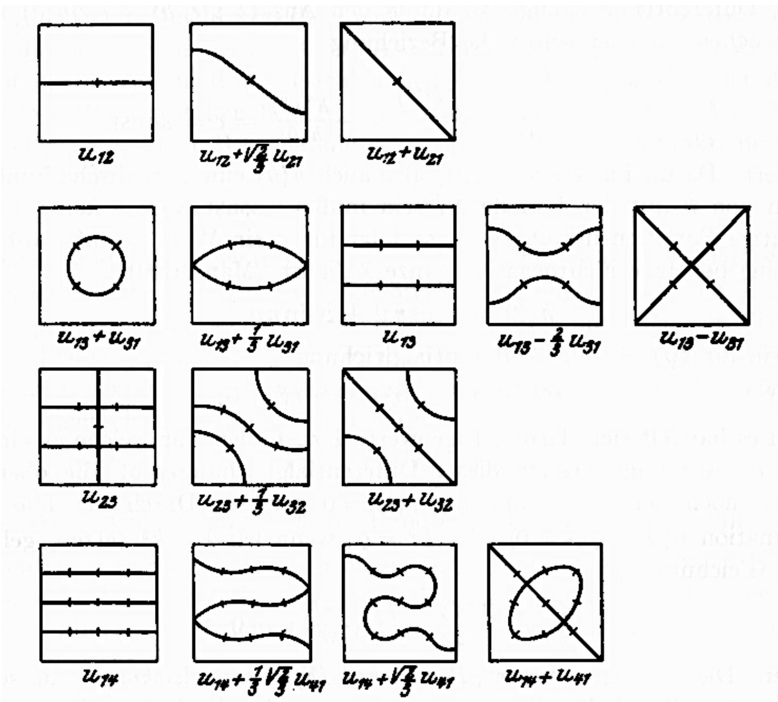
$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

ja

$$u_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Tässä on syytä huomata, että eri arvoilla n, m voidaan saada sama ominaisarvo λ. Esimerkiksi, kun $a = b = \pi$, on $\lambda = n^2 + m^2$ ja $u_{nm}(x, y) = \sin nx \sin my$. Tällöin ominaisarvo $\lambda = 5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2$ ja (6.6):n ominaisfunktioita ovat $u = \alpha u_{1,2} + \beta u_{2,1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kunhan $u \neq 0$.

Allaolevissa kuvassa on ominaisfunktion noodikäyriä, siis käyriä, joilla $u(x, y) = 0$. Ominaisfunktioiden $\sin nx$ ja $\sin my$ noodikäyrät ovat yksinkertaisesti akselien suuntaisia janoja, mutta moninkertaisten ominaisarvojen tapauksessa esiintyy monia muita käyriä. Kuvassa on muutamia esimerkkejä funktion $\alpha \sin mx \sin ny + \beta \sin nx \sin my$ noodikäyristä neliössä. $u_{mn} = \sin mx \sin ny$.



Kuva 81. Funktion $\alpha \sin mx \sin ny + \beta \sin nx \sin my$ noodikäyriä neliössä.

Yleensä ominaisfunktion noodikäyrä jakaa alueen useampaan kuin kahteen komponenttiin.Tietyille yksiulotteisille tehtäville tämä voidaan osoittaa, mutta usean muuttujan tilanteessa poikkeuksia esiintyy. Vrt. alla olevaan esimerkkiin[158]

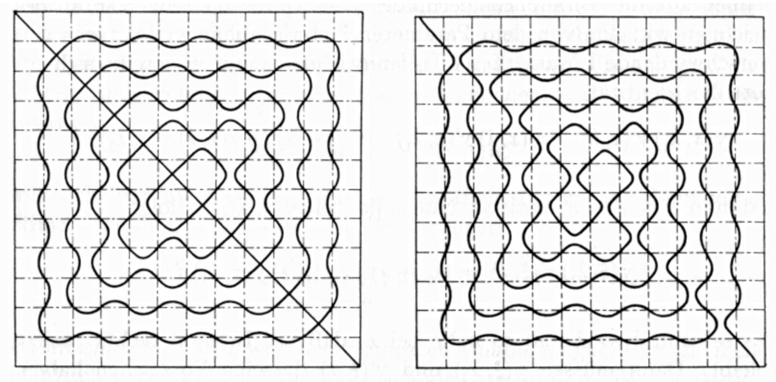


Abb. 6. Abb. 7.

KUVA 82. FUNKTION $\alpha \sin mx \sin ny + \beta \sin nx \sin my$ NOODIKÄYRIÄ NELIÖSSÄ.

[158] [CH] Band 1 S. 451-455.