JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 A / 2009 Maanantai klo 10-12 MAD 380 Harjoitus 6

1. Lausu seuraavat polynomit symmetristen alkeispolynomien avulla, mikäli mahdollista.

(1) $x^2 + y^2 + z^2$
(2) $x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$

2. Lausu seuraavat polynomit symmetristen alkeispolynomien avulla, mikäli mahdollista.

(3) $x^3 + y^3 + z^3$
(4) $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$
(5) z^3.

3. Todista symmetristen polynomien esityslause induktiolla käymällä läpi tämä ja tehtävät 4 ja 5:

Osoita aluksi harjoitusmielessä suoraan, että jokainen symmetrinen kahden muuttujan polynomi $P(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ voidaan esittää polynomina kahden muuttujan alkeellisista symmetrisistä polynomeista $x + y$ ja xy. Luennolla esitetty menetelmä on seuraava:

(1) Osoita, että jos P sisältää termin ax^iy^j, niin se sisältää myös termin ax^jy^i.
(2) Todista, että P voidaan lausua summana muotoa $a(x^iy^j + x^jy^i)$ tai ax^iy^i olevista termeistä.

4.

(3) Täydennä kaavat:

$$x^iy^j + x^jy^i = x^iy^i(\dots), \text{ kun } i < j.$$
$$x^iy^i = (\dots)^i$$
$$(x^i + y^i) = (x + y)(x^{i-1} + y^{i-1}) - xy(\dots).$$

(4) Osoita, että $P(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ voidaan esittää polynomina polynomeista $x + y$ ja xy.

5.

(5) Aloita yleistys n muuttujalle olettamalla, että $P(x_1, \dots, x_n)$ on symmetrinen $\mathbb{K}$-polynomi. Määritellään monomin $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$ *korkeus* luvuksi $i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \cdots + ni_n$. Olkoon koko polynomin P *korkeus* maksimi sen monomien korkeuksista ja P:n *korkein osa* niiden P:n monomien summa, joilla on tämä suurin korkeus. Keksi polynomi $Q = Q(x_1, \dots, x_n)$, joka on summa muotoa $\lambda s_1^{k_1}s_2^{k_2}\dots s_n^{k_n}$ olevista termeistä, missä $s_1, \dots, s_n$ ovat n:n muuttujan symmetriset polynomit, $\lambda \in \mathbb{K}$ ja P:llä ja Q:lla on sama korkein osa.
(6) Huomaa lopuksi, että $P - Q$ on aidosti matalampi kuin P, joten menettelyn toisto päättyy ja antaa halutun esityksen.

KÄÄNNÄ

Newtonin identiteetit

6. Olkoon $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ polynomi, jonka kertoimet ovat kunnassa $\mathbb{K}$. (Voit olettaa, että $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, jos haluat.)

Olikoon $\mathbb{L}$ kunnan $\mathbb{K}$ laajennus, jossa on alkiot $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (f:n nollakohdat) siten, että

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n).$$

Merkitään $\lambda_j = \alpha_1^j + \cdots + \alpha_n^j$.

Todista *Newtonin 1. identiteetti*:

$$a_{n-1} + a_n \lambda_1 = 0$$

7. (jatkoa) Todista loputkin *Newtonin identiteetit*:

$$\begin{aligned} 2a_{n-2} + a_{n-1}\lambda_1 + a_n\lambda_2 &= 0 \\ 3a_{n-3} + a_{n-2}\lambda_1 + a_{n-1}\lambda_2 + a_n\lambda_3 &= 0 \\ &\dots \\ na_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_{n-1}\lambda_{n-1} + a_n\lambda_n &= 0 \\ &\dots \\ a_0\lambda_k + a_1\lambda_{k+1} + \cdots + a_{n-1}\lambda_{k+n-1} + a_n\lambda_{k+n} &= 0, \text{ kun } k \geq 1. \end{aligned}$$

8. *. (jatkoa) Mitä mukavia kaavoja luvuille λ_k tästä saa? (Etsi vaikka internetistä)