JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 B 2009. Ma.20.4. klo. 10-12 **Harjoitus 6 (12, viimeinen)**

Tenttipäivät ovat keskiviikot 29.4., 6.5. ja 20.5.
Opetus päättyy viikolla 17.

1. Osoita, että ryhmän normaali aliryhmä on yhdiste konjugaattiluokista. Todista sitten ryhmän $\mathcal{A}_5$ yksinkertaisuus määräämällä ensin sen konjugaattiluokat (katso syklien pituuksia).

2. Osoita, että ryhmän $\mathcal{S}_n$ keskus on triviaali, kun $n \geq 3$.

3. *Dihedraalinen ryhmä* $\mathbb{D}_n$ on ryhmä, jonka alkiot ovat kahdesta kirjaimesta a ja b muodostuvat äärelliset jonot eli "sanat" ja jossa samaistetaan $a^n = b^2 = e$ =neutraalialkio ja lisäksi $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Tässä tarkoitetaan, että ei ole muita "relaatioita". Isomorfiaa vaille $\mathbb{D}_n$ on sama kuin *säännöllisen n-kulmion symmetriaryhmä*, jonka alkiot ovat ne tason isometriset isomorfismit, jotka kuvaavat monikuomion itselleen, siis tällaiset kierrot (lyhin niistä a) ja peilaukset (yksi niistä b). Jos epäselvää, katso moniste. Selvyyden vuoksi voit valita sopivan konkreettisen n:n , jos haluat.

Osoita, että $\mathbb{D}_n$ on ratkeava.

4. Määrää $\mathbb{D}_n$:n konjugaattiluokat, poimi kustakin jokin alkio ja määrää sen keskittäjä. Tarkasta lauseen 5.40 tulos tässä tilanteessa.

5. Keksi $\mathbb{Q}$:lle radikaalilaajennus (ja sen juurijono), joka sisältää luvun:

(a) $(\sqrt{11} - \sqrt[7]{23})/\sqrt[4]{5}$
(b) $(\sqrt{6} - 2\sqrt[3]{5})^4$
(c) $(2\sqrt[5]{5} - 4)/\sqrt{1 + \sqrt{99}}$

6. Määrää polynomin $x^p - 1$ Galois-ryhmä, kun p on alkuluku.

7. Osoita, että seuraavat $\mathbb{Q}$-polynomit eivät ratkea radikaalein:

(a) $x^5 - 4x + 2$
(b) $x^5 - 4x^2 + 2$
(c) $x^5 - 6x^2 + 3$
(d) $x^7 - 10x^5 - 15x + 5$

8. Osoita, että jos $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ on radikaalilaajennus ja $\mathbb{M}$ sen välikunta, niin $\mathbb{M} : \mathbb{K}$ ei välttämättä ole radikaalilaajennus.

9. Osoita, että jos jaottoman polynomin jokin 0-kohta on lausuttavissa radikaalein, niin toisetkin ovat.

KÄÄNNÄ

10. Viisasta vai vilunkia?

(a) Jokainen neljännen asteen $\mathbb{K}$-polynomi voidaan ratkaista radikaalein, kun $\mathbb{K}$ on $\mathbb{C}$:n alikunta.
(b) Jokainen radikaalilaajennus on äärellinen.
(c) Jokainen äärellinen kuntalaajennuus on radikaalilaajennus.
(d *) n-asteisen polynomin Galois-ryhmän kertaluku jakaa kertoman $n!$.
(e) On olemassa neljännen asteen polynomi, jonka Galois-ryhmä on $\mathcal{S}_4$.
(f) Jos 11. asteen jaottomalla polynomlla on tasan 9 reaalista nollakohtaa, niin sen Galois-ryhmä on $\mathcal{S}_{11}$.
(g) Radikaalilaajennuksen normaali sulkeuma on radikaalilaajennus.

11. *. On ainakin kaksi tapaa ajatella ryhmähomomorfismeja. Homomorfismi on toisaalta ryhmän rakenteen säilyttävä kuvaus ja toisaalta olennaisesti kanooninen surjektio tekijäryhmälle. Näiden ajattelutapojen välinen yhteys on tietenkin se, että jos $\varphi : G \to H$ on homomorfismi, niin $\operatorname{Ker}\varphi \triangleleft G$ ja $G/\operatorname{Ker}\varphi \overset{\sim}{=} \varphi(G)$ ja että kääntäen, jos $N \triangleleft G$, niin kanoninen surjektio $G \to G/N : g \mapsto [g]$ on homomorfismi. Lue ensimmäinen ja toinen ryhmien isomorfialause sillä silmällä, että homomorfismi on ryhmän rakenteen säilyttävä kuvaus, jolloin ne ilmaisevat seuraavat kaksi perusasiaa:

1) Homomorfismin rajoittuma aliryhmään on homomorfismi.
2) Kahden homomorfismin yhdistetty kuvaus on homomorfismi.