JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 B 2009. Maanantai 6.4. klo. 10-12 MAD 380 Harjoitus 5(11)

1. Todista (induktiolla) monisteen lause 5.7, jonka mukaan

(1) symmetrisessä ryhmässä $\mathcal{S}_n$ on $n!$ alkiota,
(2) joista $\frac{1}{2}n(n-1)$ on transpositioita,
(3) transpositiot generoivat koko ryhmän $\mathcal{S}_n$, ts. mikään aito aliryhmä ei sisällä niitä kaikkia,
(4) jo peräkkästen alkioiden tanspositiot $(i, i+1)$ generoivat ryhmän $\mathcal{S}_n$, mutta ne tarvitaan kaikki. Kyseessä on siis minimaalinen virittäjistö.

2. (jatkoa)

(5) jokainen transpositio (i, j), jolla $i < j$, on muotoa $(i, j) = (i, i+1) \dots (j-2, j-1)(j-1, j)(j-2, j-1) \dots (i, i+1)$
(6) transpositio $(1, 2)$ ja kierto $(1, 2, 3, \dots, n)$ generoivat ryhmän $\mathcal{S}_n$, ts. $\mathcal{S}_n = \langle \{(1, 2), (1, 2, 3, \dots, n)\} \rangle$.

3. Oleta tunnetuksi, että $\mathcal{A}_5$ on yksinkertainen, ja johda tästä tieto, että mikään $\mathcal{S}_n$, missä $n \geq 5$, ei ole ratkeava.

4. Osoita, että $15 \mid \sharp \mathcal{A}_5$. Onko olemassa $\mathcal{A}_5$:n 15-alkioinen aliryhmä?

5. Olkoon $K \triangleleft H \triangleleft G$. Onko välttämättä $K \triangleleft G$? Onko välttämättä $K \ntriangleleft G$?

6. Todista, että jos $\sharp G = p$ on alkuluku, niin ryhmä G on kommutatiivinen eli abel. (Vihje: tunnista G) Onko G ratkeava? Onko G yksinkertainen?

7. Todista, että tekijäryhmä G/H on kommutatiivinen aina ja vain, kun normaali aliryhmä $H \triangleleft G$ sisältää G:n kaikki *kommutaattorit* eli alkiot $xyx^{-1}y^{-1}$, missä x ja $y \in G$. (Erityisesti siis näin käy, kun H on suppein näistä, näiden leikkaus eli G:n *kommutaattorialiryhmä, ts.* $H = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$.

8. Totta vai tarua

(1) Kahden ratkeavan ryhmän tuloryhmä on ratkeava.
(2) Jokainen yksinkertainen ryhmä on syklinen.
(3) Jokainen syklinen ryhmä on yksinkertainen.
(4) Symmetrinen ryhmä $\mathcal{S}_n$ on yksinkertainen, kun $n \geq 5$.
(5) Ryhmän G *konjugaattiluokat* $\{aba^{-1} \mid a \in G\}$, $b \in G$ ovat G:n aliryhmiä.

9. * Olkoon piste $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ konstruoitavissa harpilla ja viivaimella pisteistä $(0, 0)$ ja $(1, 0)$. Osoita, että Galois'n ryhmä $\Gamma(\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q})$ on ratkeava.

10. * * Osoita, että säännöllisen ikosaedrin rotaatiosymmetriartyhmä on $\mathcal{A}_5$. Vihje: laske kaikkien konjugaattiluokkien $\{aba^{-1} \mid a \in G\}$ koot, $b \in G$.