LIITE

TUTKIELMAAN

UUSIA MENETELMIÄ

KOMEETTOJEN RATOJEN
MÄÄRITTÄMISEKSI

A. M. LEGENDRE

PARIISISSA

VUONNA XIII — 1805

Ranskankielisestä alkutekstistä Google-kääntäjän avulla suomentanut
Jukka Nyblom.
31. elokuuta 2020

LIITE

Pienimmän neliösumman menetelmästä

Useimmissa kysymyksissä, joissa havaintomittausten perusteella tehdään johtopäätöksiä, tulokset ovat täsmällisimmin esitettävissä yhtälösysteeminä

$$E = a + bx + cy + fz + \&c.,$$

missä $a, b, c, f, \&c.$ ovat tunnettuja kertoimia, jotka vaihtelevat yhtälöstä toiseen ja $x, y, z, \&c.$ tuntemattomia, jotka pitää määrittää sellaisella ehdolla, että E on joko nolla tai hyvin pieni jokaisessa yhtälössä.

Jos yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia $x, y, z, \&c.$ tuntemattomien määrittämisessä ei ole vaikeuksia, ja voimme tehdä virheet E täsmälleen nollaksi. Mutta usein yhtälöitä on paljon enemmän kuin tuntemattomia eikä ole mahdollista olettaa kaikkia virheitä nolliksi.

Näissä olosuhteissa, jotka ovat hyvin tavallisia fysiikassa ja astronomiassa, kun pyritään määrittelemään joitain tärkeitä luonnon vakioita, joudutaan välttämättä arvioimaan virheiden jakautumista, eikä voida odottaa, että kaikki olettamukset johtavat täsmälleen samoihin tuloksiin. Mutta ennen kaikkea meidän on varmistettava, että suurimmat virheet, etumerkistä riippumatta, on pidettävä mahdollisimman kapeissa rajoissa.

Kaikista niistä periaatteista, joita voidaan ehdottaa tähän tarkoitukseen, mikään ei ole niin yleinen, niin täsmällinen, eikä niin helppo soveltaa kuin se, jota olemme käyttäneet edeltävässä tutkimuksessa[1]. Menetelmä perustuu virheiden neliösumman minimointiin. Tällä tavoin virheiden välille muodostetaan eräänlainen tasapaino, joka estää äärimmäisten virheiden liiallisen korostumisen ja joka tuottaa yhtälöryhmälle lähes oikean ratkaisun.

Virheiden neliösumma $E^2 + E'^2 + E''^2 + \cdots$ on

$$\begin{array}{rl} & (a + bx + cy + fz + \&c.)^2 \\ + & (a' + b'x + c'y + f'z + \&c.)^2 \\ + & (a'' + b''x + c''y + f''z + \&c.)^2 \\ + & \&c. \end{array}$$

Jos tämän neliösumman minimiä etsitään ainoastaa x:n suhteen, päädytään yhtälöön

$$0 = \sum ab + x \sum b^2 + y \sum bc + z \sum bf + \&c,$$

missä $\sum ab$ tarkoittaa tulojen summaa $ab + a'b' + a''b'' + \&c.$ ja $\sum b^2$ tarkoittaa x:n kertoimena olevaa neliösummaa $b^2 + b'^2 + b''^2 + \&c.$ jne. Minimi y:n suhteen antaa samantapaisen kaavan

$$0 = \sum ac + x \sum bc + y \sum c^2 + z \sum fc + \&c.,$$

[1]Viittaa komeettojen ratojen määrittämiseen, joka on ollut Legendren varsinaisen tutkielman aihe. JN.

ja minimi z:n suhteen on

$$0 = \sum af + x\sum bf + y\sum cf + z\sum f^2 + \&c.$$

Huomaamme, että kahdessa yhtälössä on samat kertoimet $\sum bc$ ja $\sum bf$ jne, jotka helpottavat laskuja.

Yleisesti: *Kun muodostetaan yhtälö minimointia varten yhden tuntemattoman suhteen, kaikki yhtälön termit pitää kertoa sen nimenomaisen tuntemattoman kertoimella ottamalla sen etumerkki huomioon ja muodostamalla summa kaikista näistä tuloista.*[2]

Tällä tavalla saamme minimiä varten yhtä monta yhtälöä kuin on tuntemattomia. Nämä yhtälöt on ratkaistavissa tavallisilla menetelmillä. Mutta pitää olla varovainen kaikkien laskujen, sekä kertolaskujen että ratkaisun, pyöristämisessä hyväksymällä jokaisessa operaatiossa numeroita kokonais- ja desimaaliosiin niin paljon kuin tarvitaan tuottamaan ongelman kannalta sovelias approksimaatio.

Jos sattumalta olisi mahdollista tyydyttää kaikki yhtälöt tekemällä kaikki virheet nolliksi, saamme tämän tuloksen myös pienimmän neliösumman yhtälöiden avulla. Jos olemme löytäneet arvot $x, y, z, \&c.$, jotka nollaavat virheet $E, E', \&c.$, on selvää, että lisäämällä arvoihin $x, y, z, \&c$ muutokset $\delta x, \delta y, \delta z, \&c.$ aiemmin nollaksi saatu E^2 saa arvon $(a\delta x+b\delta y+c\delta z+\&c.)^2$. Sama koskee myös neliöitä $E'^2, E''^2, \&c.$ Tästä näemme, että virheiden neliöiden summan muutos on toista kertalukua suhteessa muutoksiin $\delta x, \delta y, \&c.$, mikä on yhdenmukainen minimin saavuttamisvaatimuksen kanssa.

Jos olemme määrittäneet kaikki tuntemattomat, korvaamme niiden arvot esillä olevissa yhtälöissä. Siten tiedämme ne virheet, joita tämä ratkaisu aiheuttaa. Näitä virheitä ei voida pienentää kasvattamatta neliösummaa. Jos havaitsemme näiden virheiden joukossa liian suuria hyväksyttäväksi, hylkäämme yhtälöt, jotka tuottivat nämä virheet virheellisten kokeiden perusteella, ja määritämme tuntemattomat jäljellä olevien yhtälöiden avulla, mikä johtaa tällöin paljon pienempiin virheisiin. On myös hyvä huomattata, että meidän ei tarvitse aloittaa kaikkia laskelmia uudelleen alusta asti. Koska minimin antavat yhtälöt muodostuvat tulojen summista, riittää, että vähennetään näistä summista ne tulot, joiden tekijöinä on mukana huomattaviin virheisiin liittyviä havaintoja.

Sääntö, jonka avulla hankimme eri havaintoarvojen keskikohdan, on vain hyvin yksinkertainen seuraus yleisestä menetelmästämme, jota kutsumme *pienimmän neliösumman menetelmäksi.*

Itse asiassa, jos kokeessa on saatu erilaisia arvoja $a', a'', a''', \&c.$ jollekin suureelle x, virheiden neliöiden summa on

$$(a' - x)^2 + (a'' - x)^2) + (a''' - x)^2 + \&c.$$

ja asettamalla tämä neliösumma minimiinsä, saamme

$$0 = (a' - x) + (a'' - x) + (a''' - x) + \&c.$$

Se tuottaa ratkaisun

$$x = \frac{a' + a'' + a''' + \&c.}{n},$$

[2]Tämä nähdään helposti ottamalla osittaisderivaatta x:n suhteen. Jostakin syystä Legendre ei viittaa tässä eikä muuallakaan lainkaan differentiaalilaskentaan. JN.

missä n on havaintojen lukumäärä.

Samoin, jos haluamme määrittää pisteen paikan avaruudessa ja olemme löytäneet ensimmäisessä kokeessa koordinaatit a', b', c' ja toisessa kokeessa koordinaatit a'', b'', c'' jne. Jos tämä pisteen todennäköiset koordinnatit ovat x, y, z, ensimmäisen kokeen virhe on etäisyys pisteestä (a', b', c') pisteeseen x, y, z. Etäisyyden neliö on

$$(a' - x)^2 + (b' - y)^2 + (c' - z)^2.$$

Tällaisten neliöitten summa saavuttaa miniminsä kun

$$x = \frac{\sum a}{n}, \; y = \frac{\sum b}{n}, \; z = \frac{\sum c}{n},$$

missä n on kokeiden lukumäärä. Nämä kaavat ovat samoja kuin ne, jotka antavat sellaisten kappaleiden painopisteen, joiden massat ovat yhtä suuria, ja jotka sijaitsevat annetuissa paikoissa. Tästä näemme, että minkä tahansa kappaleen painopisteellä on tämä yleinen omaisuus:

Jos jaamme kappaleen massan yhtä suuriin hiukkasiin ja oletetaan ne tarpeeksi pieniksi, jotta niitä voidaan pitää pisteinä, hiukkasten etäisyyksien neliöiden summa painopisteen suhteen saavuttaa miniminsä.

Näemme silloin, että pienimmän neliösumman menetelmä antaa tietyssä tapauksessa keskikohdan, jonka ympärillä kaikki kokeen tuottamat tulokset ovat ja poikkeavat siitä mahdollisimman vähän. Sovellus, jonka me tämän menetelmän avulla suoritamme meridiaanien mittaamiseksi, osoittaa lopullisesti sen yksinkertaisuuden ja hyödyllisyyden.

Sovellus meridiaaniasteiden mittaukseen[3]

Oletetaan, että meridiaani on ellipsi, jonka akselit ovat 1 ja $1 + \alpha$.

- D on 45. leveysasteen ympärillä olevan yhden asteen meridiaanikaaren pituus.
- S on leveysasteiden L ja L' välisen meridiaanikaaren pituus.

Silloin pätee[4]

$$S = D(L' - L) - \frac{3}{2}\alpha D \cdot \frac{180}{\pi} \sin(L' - L) \cos(L' + L),$$

[3] Huhtikuussa 1791 Pariisin tiedeakatemia oli nimittänyt kolme jäsentään hoitamaan meridiaanikaaren mittauksen Dunkerquesta Barcelonaan. Tarkoitus oli määrittää uusi mittyksikkö, joka sai sittemmmin nimen *mètre* eli suomeksi metri. Legendre oli yksi kolmesta tehtävään valitusta. Kaksi muuta olivat Méchain ja Cassini (Cassini IV), joiden piti suorittaa varsinainen mittausoperaatio, mutta Cassinin lopulta kieltäytyessä, tilalle valittiin Delambre. Ks. Alder *The Measure of all Things,* s. 20–23, 2002. Little, Brown Group. London.

[4] Kaava on peräisin Laplacen teoksesta *Traité de mécanique céleste*, Tome II, s. 141. Suomalainen H. J. Walbeck viittaa tämän teoksen saksankieliseen käännökseen ja käyttää samaa kaavaa kuuluisassa tutkimuksessaan De forma et magnitudine telluris ex dimensis arcubus meridiani definiendis (Maan muodosta ja koosta meridiaanikaarien pituuksien perusteella) v. 1819. JN.

mistä seuraa

$$L' - L = \frac{S}{D} + \frac{3}{2}\alpha \cdot \frac{180}{\pi} \sin(L' - L)\cos(L' + L).$$

Koska 45. leveysasteen ympärillä olevan yhden asteen meridiaanikaaren pituus on likimäärin 28500 modulia[5]. Asetetaan

$$\frac{1}{D} = \frac{1 + c}{28500},$$

missä c on hyvin pieni. Saamme

$$L' - L = \frac{S}{28500} + c\frac{S}{28500} + \alpha \cdot \frac{270}{\pi} \sin(L' - L)\cos(L' + L). \tag{1}$$

Tämä yhtälö pätee kaikkien leveysasteiden kohdalla ja liittää niihin vakiot α ja c. Seuraavassa on taulukko Ranskassa Delambren ja Méchainin mittaamien meridiaanikaarien pituuksista[6].

Paikkakunta	Leveysaste	Kaaren pituus moduulia	$L' - L$	$L' + L$
Dunkerque	51° 2' 10"50			
		DP 62472.59	2° 11' 20"75	99° 53' 0"
Panthéon	48° 50' 49"75			
		PE 76145.74	2° 40' 7"25	95° 1' 32"
Evaux	46° 10' 42"50			
		EC 84424.55	2° 57' 48"10	89° 23' 37"
Carcassone	43° 12' 54"40			
		CM 52749.48	1° 51' 9"60	84° 34' 39"
Montjouy	41° 21' 44"80			

Meillä on siis neljä kaaren pituutta, jotka voidaan sijoittaa yhtälöön (1) ja jotka tuottavat neljä yhtälöä vakioiden α ja c ratkaisemiseksi. Mutta koska samat vakioiden arvot eivät toteuta täsmälleen kaikkia neljää yhtälöä, lisäämme virhetermin jokaiseen leveysasteeseen. Otamme näille virheille merkinnät E', E'' jne. vastaamaan leveysasteita Dunkerque, Panthéon jne. Nämä virheet tulevat yhtälöiden ensimmäisiksi termeiksi. Ne ovat liian pieniä vaikuttaakseen α:n kertoimeen toisessa termissä. Neljästä kaaren mittauksesta saamme seuraavat yhtälöt

$$\begin{aligned}
E' - E'' &= 0.002923 + c(2.192) - \alpha(0.563),\\
E'' - E''' &= 0.003100 + c(2.672) - \alpha(0.351),\\
E''' - E^{iv} &= -0.001096 + c(2.962) - \alpha(0.047),\\
E^{iv} - E^{v} &= -0.001808 + c(1.851) - \alpha(0.263).
\end{aligned}$$

[5] Etukäteen oli määritelty, että metrin tuli olla kymmenesmiljoonas osa Pohjoisnavan etäisyydestä Päivänasaajalta mitattuna maan pintaa pitkin. Yhden asteen pituus 45. leveysasteella on keskiarvo kaikista yhden asteen pituuksista. Tämän keskiarvon tiedettiin olevan likimäärin 28500 moduulia. JN.

[6] Montjouy on kukkula Barcelonassa ja on nykyisin nimeltään Montjuïc. JN.

Voidaksemme käsitellä virheitä erikseen luomme uuden tuntemattoman esim. virheestä E'''. Saamme viisi yhtälöä[7]

$$\begin{aligned}
E' &= E''' + 0.006023 + c(4.864) - \alpha(0.914), \\
E'' &= E''' + 0.003100 + c(2.672) - \alpha(0.351), \\
E''' &= E''', \\
E^{iv} &= E''' + 0.001096 - c(2.962) - \alpha(0.047), \\
E^{v} &= E''' + 0.002904 - c(4.813) - \alpha(0.310).
\end{aligned}$$

Seuraavaksi täytyy etsiä näiden viiden virheen neliösumman minimi. Aloitetaan tuntemattomasta E''', jonka kaikki kertoimet ovat ykkösiä. Se johtaa yhtälöön[8]

$$0 = 5E''' + 0.013123 - c(0.239) - \alpha(1.622),$$

mistä seuraa

$$E''' = -0.002625 + c(0.048) + \alpha(0.324).$$

Sijoittamalla tämä yo. viiteen yhtälöön saamme

$$\begin{aligned}
E' &= 0.003398 + c(4.912) - \alpha(0.590), \\
E'' &= 0.000475 + c(2.720) - \alpha(0.027), \\
E''' &= -0.002625 + c(0.048) + \alpha(0.324), \\
E^{iv} &= -0.001529 - c(2.914) + \alpha(0.277), \\
E^{v} &= 0.000279 - c(4.765) + \alpha(0.014).
\end{aligned}$$

Kun etsitään minimiä c:n suhteen kerrotaan 1. yhtälö luvulla 4.912, toinen luvulla 2.720, kolmas luvulla 0.048, neljäs luvulla 2.914 ja viides luvulla 4.765. Sitten asetetaan näiden tulojen summa nollaksi. Samalla tavalla menetellään, kun etsitään minimi α:n suhteen. Saamme kaksi yhtälöä

$$\begin{aligned}
0 &= 0.020983 + c(62.726) - \alpha(3.830), \\
0 &= -0.003287 - c(\ 3.830) + \alpha(0.531),
\end{aligned}$$

joiden ratkaisut ovat $\alpha = 0.00675$ ja $c = 0.0000778$, sekä edelleen[9]

$$\text{litistyminen } \alpha = \frac{1}{148}$$

ja

$$45.\text{ leveysasteen kohdalla } D = \frac{28500}{1+c} = 28497.78.$$

---

[7] 1. ja 5. yhtälö saadaan laskemalla edellisestä yhtälöryhmästä $E' - E''' = E' - E'' + E'' - E'''$ ja $E^{v} - E''' = E^{v} - E^{iv} + E^{iv} - E'''$. JN.

[8] Ks. Legendren periaate s. 3. JN.

[9] Legendren ratkaisu saadaan myös yleistetyn p.n.s.-menetelmän avulla: Määritellään 4×4 kovarianssimatriisi riippumattomien virheiden erotusten $E' - E''$, $E'' - E'''$, $E''' - E^{iv}$, $E^{iv} - E^{v}$ avulla ja oletetaan virheiden varianssit yhtä suuriksi. Tämä muotoilu mahdollistaa myös modernit tilastolliset johtopäätökset. Litistyneisyyden 95%:n luottamusväliksi saadaan (1/166, 1/133) ja yhden asteen pituuden luottamusväliksi 45. leveysasteella tulee (28495,81; 28499,73). JN.

Heilurin ja joidenkin astronomisten ilmiöiden avulla litistyminen on vain $\frac{1}{320}$ ja 45. asteen meridiaanikaaren pituus on 28504.10, joka on johdettu Ranskassa ja Perussa tehtyjen mittausten vertailujen perusteella. Tämä on se viimeinen tulos, johon metrin määritelmä perustuu. Jos pidämme kiinni ainoastaan Ranskassa suoritetuista mittauksista, metriä pitäisi lyhentää noin 4500. osalla[10]. Mutta litistymisen arvo 1/148 sopii liian huonosti yhteen sen kanssa, mitä tiedämme muiden ilmiöiden avulla, eikä sitä näin ollen voida hyväksyä lopulliseksi tulokseksi.

Arvot, jotka on saatu α:lle ja c:lle, määrittävät sellaisen ellipsin, joka antaa mahdollisimman tarkasti Dunkerquen ja Barcelonan välisen meridiaanikaaren pituuden. Tämä ellipsi on paljon litteämpi kuin se, joka sopii maapallon yleiselle muodolle. Havaituissa leveysasteissa olevat virheet E', E'' jne. määritetään korvaamalla niiden lausekkeissa olevat α ja c estimaateillaan. Virheet ovat sekunneissa

$$E' = -0''.73, E'' = 1''.83, E''' = -1''.55, E^{iv} = 0''.42, E^{v} = 0''.03.$$

Kaikista suurin ei nouse arvoon $2''$, ja keskiarvo on merkkejä huomioimatta vain $0''.91$. Jos sen sijaan, että etsimme absoluuttiseen minimiin sopivia kahta arvoa α ja c, aloitamme asettamalla α:n yhtä suureksi kuin tunnettu litistyneisyys 1/320, saamme yhtälöiksi

$$\begin{aligned} E' &= 0.001554 + c(4.912), \\ E'' &= 0.000391 + c(2.720), \\ E''' &= -0.001612 + c(0.048), \\ E^{iv} &= -0.000663 - c(2.914), \\ E^{v} &= 0.000323 - c(4.765). \end{aligned}$$

Yhtälöryhmää vastaava minimi toteuttaa yhtälön $0 = 0.009010 + c(62.726)$, jonka ratkaisu on $c = -0.0001436$. Siis 45. leveysasteen ympärillä olevan meridiaanikaaren pituus on $2500(1 - c) = 28504.09$, joka on riittävän lähellä aikaisemmin omaksuttua arvoa[11]. Mutta nyt sekunneissa ilmaistut virheet muuttuvat ja ovat

$$E' = -3''.06, E'' = 0''.00, E''' = -5''.83, E^{iv} = -0''.88, E^{v} = 3''.62.$$

Nämä virheet ovat suurempia kuin absoluuttisen minimin tapauksessa; suurin osuu Evauxin leveyspiirille ja pienin, joka on täysin nolla, Pantheonin leveydelle.

Lisäksi leveysasteiden poikkeavuudet, joita ei epäilyksettä pidä panna havaintojen osalle, johtuvat todennäköisesti paikallisista vetovoimista, jotka vaikuttavat epäsäännöllisesti lyijyrihmaan[12]. Tähän riittää homogeenisuuden puute maakerroksissa, jotka

[10]Käyttämällä yhden asteen meridiaanikaaren keskimääräistä pituutta 28504.10 moduulia, saadaan metrin arvoksi $m_0 = 90 \cdot 28504.10/10^7$ moduulia. Jos taas käytetään pituutta 28497.78 moduulia saadaan metrin pituudeksi $m_1 = 90 \cdot 28497.78/10^7$ moduulia. Suhteelliseksi eroksi saadaan $(m_0 - m_1)/m_0 \approx 1/4500$. Metri olisi siis jäänyt n. 0,2 mm päätettyä lyhemmäksi.

Kansainvälinen paino- ja mittakomissio määritteli v. 1799 metrin pituuden käyttämällä sekä Ranskassa sitä varten mitattua aineistoa että vanhaa 1730-40 Perussa mitattua aineistoa. Lopulliseksi arvoksi tuli 443,296 Pariisin linjaa. Pelkästään Ranskassa mitatun aineiston perusteella olisi saatu metriksi 443,197 Pariisin linjaa, jonka 95%:n luottamusväli on (443,167; 443,228). JN.

[11]So. em. arvoa 28504.10. JN.

[12]Lyijyrihmalla määritettiin mittauspaikan zeniittipiste, mikä oli tärkeätä leveysasteen määrityksessä. JN

ovat lähellä paikkaa, missä leveysaste määritetään. Sama syy, joka siirtää näennäisen zeniitin lähemmäksi joko pohjoista tai etelää, voi myös kääntää sitä muutaman sekunnin joko itään tai länteen. Se selittää eroavuudet, joita on havaittu myös atsimuuteissa[13].

Koska näiden poikkeavuuksien olemassaolo on tunnettua, meridiaanin kaarien pituus on vähemmän sopiva kuin heilurin pituus universaalisen mitan[14] määrittämisen kannalta; eikä ole yllättävää, että muutoin hyvin huolelliset havainnoijat eivät ole päässeet yksimielisyyteen meridiaanin mittamisessa, koska paikallisten vetovoimien vuoksi kahden päiväntasaajasta yhtä kaukana olevan paikan leveysaste voi poiketa toisistaan useilla sekunneilla.

Pariisi, 15. ventôse-kuuta vuonna 13.

6. maaliskuuta 1805.

[13] Ks. esim. https://fi.wikipedia.org/wiki/Atsimuutti.

[14] Ranskan kansalliskokous määräsi 8. toukokuuta 1790 asetuksessaan uuden mittayksikön perustaksi sekuntiheilurin pituuden 45. leveysasteella, mutta tiedeakatemia ehdotti meridiaanikaaren mitausta Dunkerquesta Barcelonaan, mikä sitten tuli kansalliskokouksen asetukseksi 26. maaliskuuta 1791. Ks. emt. Alder(2002, s. 93–95.) JN.