

DISSERTATIO ACADEMICA

DE FIGURA TELLURIS OPE
PENDULORUM DETERMINANDA

PART. V

PRAESIDE

M. GUST. GABR. HÄLLSTRÖM

PRO GRADU PHILOSOPHICO

P.P.

JOHANNES MAGNUS A TENGSTRÖM

In Audit. Mathemat. Die xxvii Maji MDCCCXV

ABOAE

Exscripsit Jukka Nyblom
III Aprilis MMXIX

Antequam ratiociniorum & formularum, quae in praecedentibus afferuntur, instituitur applicatio, plurium novissimis maxime his annis factarum observationum fiat recensio, quo plenior earum habeatur collectio & certior inde deducatur conclusio. Maxima earum pars Hispaniae Navigatori nomine *Ciscar* debetur, qui in itinere circum terram invariato utebatur pendulo ligneo, globum inferne ferente cupreum¹. Adeo parva vulgo putatur ligni a calore dilatio, ut negligi omnino queat, quare pro longitudine hujus penduli nulla opus erit correctione. Neque variationes densitatis aëris, si datae quoque essent, aliquam requirere reductionem ostendit Cel. *Oltmanns*, cum partem $\frac{1}{30}$ altitudinis Barometricae numquam superaverit Mercurii variatio. In reductione igitur, parva certe etiam illa, ad spatium aëre vacuum & temperaturam congelationis aquae, solius caloris aëris in observando habenda est ratio, qui, cum ab observatore non sit adnotatus, e cognitis legibus, secundum quas ab aequatore versus polos telluris decrescit, est deducendus. Facta sic longitudine penduli simplicis aequatorialis in vacuo = p , calore sub aequatore medio = m , & numero oscillationum penduli invariati = $N(m)$, nec non pondere cupri specifico = 7,8, positisque, pro alio quovis loco telluris, longitudine penduli simplicis ad vacuum reducta = π , calore ibi verisimili = μ , atque numero oscillationum = $N(\mu)$, erit e praecedentibus

$$\pi = p \left(\frac{N(\mu)}{N(m)} \right)^2 \left(1 + \frac{0,0000507}{7,8 + 0,02925 \mu} \right) / \left(1 + \frac{0,0000507}{7,8 + 0,02925 m} \right).$$

Quo loco aequatoris observaverit *Ciscar* non innotescit; cum valore penduli illius tamen determinationes comparat *Oltmanns*, quem nempe necessariis adhibitis correctionibus in regno Peruviano invenit *Bouguer* esse $p = 439,21$ lin. Paris. Etiamsi hunc valorem in praecedentibus novis adhuc reductionibus mutandum esse judicatum sit, ex iis tamen rationibus, quae in sequentibus proponuntur, apparebit verisimiliorem esse eum, qualis post reductionem *Bougueri* habetur. Mediam deinde aëris temperaturam in Zona torrida regionis Americanae, per totum fere annum eandem, observavit *Humboldt*² ad superficiem maris esse = 27° Cels., a qua non multum differt valor a *Kirwan* propositus,³ nempe 29° Cels. His igitur adhibitis valoribus, factoque, ut observavit *Ciscar*, $N(m) = 3607$ pro tempore 24 horarum, habebitur

$$\pi = \frac{439,21}{13010524} N(\mu)^2 \left(1 + \frac{0,0000507}{7,8 + 0,02925} \right),$$

seu etiam

$$\pi = 0,000033758 N(\mu)^2 \left(1 + \frac{0,0000507}{7,8 + 0,02925} \right).$$

Ipsae autem observationes & inde deducti valores pendulorum heic sunt:

¹Vide recensionem Cel. *Oltmanns* in v. *Zachs Monatl. Corresp.* 1812, p. 468 &c.

²*Voyage de Humboldt & de Bonpland*, IV:e Partie, I Vol. I Livrais. p. 112.

³In libro suo: *Angabe der Temperatur von den verschiedenen Länder und Städte.* Aus d. Engl. Berlin 1788, p. 36.

Nomen loci	Geographica								Calor verisi- milis	Numerus oscillat. in 24 h.	Longit. pend. simpl. in vacuo
	Latitudo loci				Longitudo a Parisiis						
Mulgrave ^a	67°	30'	0"	n	167°	0'	0"	w	10	3614,85	441,122
Nootka	49°	35'	0"	n	129°	2'	30"	w	15	3612,21	440,479
Monterey	36°	36'	0"	n	124°	3'	0"	w	20	3610,75	440,123
Gades	36°	32'	0"	n	8°	37'	30"	w	22	3610,24	439,999
Macao	22°	12'	44"	n	111°	15'	0"	o	24	3608,58	439,594
Acapulco	16°	50'	29"	n	101°	56'	0"	w	25	3607,83	439,412
Manilla	14°	36'	8"	n	118°	32'	0"	o	26	3607,06	439,224
Umatog	13°	18'	0"	n					26	3607,07	439,226
Sambuangan	6°	55'	0"	n	119°	0°	0'	o	27	3607,25	439,268
Aequator	0°	0'	0"		82°	0'	0"	w	27	3607,02	439,210
Lima	12°	5'	0"	s	79°	9'	30"	w	26	3607,39	439,274
Babao s. Vavao	18°	39'	0"	s	177°	0'	0"	w	24	3608,12	439,482
Portus Jackson	33°	51'	0"	s	148°	59'	30"	o	22	3610,20	439,989
Monte Video	34°	55'	0"	s	58°	25'	0"	w	21	3610,38	440,033
Conception	36°	42'	0"	s	75°	0'	0"	w	20	3610,29	440,011
St. Helena	44°	30'	0"	s	67°	40'	0"	w	18	3612,37	440,518
Puerto Egmont	51°	21'	0"	s	61°	0'	0"	w	15	3612,75	440,611

^a Hujus loci latitud. adnotavit Cel. *Oltmanns* esse 59° 33'; alium vero hoc nomine insignitum locum, quam cujus mentionem hic facimus, in vulgaribus Mapp. Geogr. non potuimus reperire.

His addi possunt sequentes observationes:

Gryphiswaldia	54°	4'	35"	n	11°	14'	30"	o	440,830
Lugdunum	52°	9'	30"	n	2°	8'	30"	o	440,710
Schweidnitz	50°	50'	39"	n	14°	16'	30"	o	440,635
Formentera	38°	39'	56"	n	1°	8'	0"	w	440,1545
Melita	35°	54'	0"	n	12°	9'	0"	o	440,220

Accuratiore instituto examine, quaedam de observationibus allatis animadversiones adponendae videntur. Sicut fortissimam adesse infra apparebit rationem, cur valor penduli aequatoris Americani, qualem eum *Bouguer*, instituta ad vacuum correctione, determinavit, ita verisimiliores ejus sunt retinendi valores pro Portobello = 439,30 & Parva Goava = 439,47. In observationibus autem a *La Caille* institutis error aliquis latere videtur. Numeravit penduli invariabilis oscillationes fuisse

	Parisiis	in calore +12,5° R	86453
in	Promonton. bonae spei	13,0° R	86406,79
	Port. Ludovici	20,5° R	86367
	Petropoli	12,5° R	86508,75

Si pendulum Parisinum uti terminus comparationis adhibetur, supra allatae oriuntur pro Promontorio bonae spei & Portu Ludovici longitudines nimis magnae. Instituta vero comparatione cum pendulo Petropolitano, habetur pendulum

Promonton. bonae spei	439,976
Port. Ludovici	439,561

Et quum longitudo penduli pro Rio Janeiro a pendulo Promontorii bonae spei sit determinata, in eadem ratione illa est minuenda, quo facto erit in Rio Janeiro pend. = 439,95. Quod vero pendulum in insula Manillae a duobus observatoribus diversis temporibus determinatum attinet, probabilior esse videtur ejus valor medius inde desumptus = 439,338. His igitur perpensis, omissisque valoribus penduli Gothaici & Genevensis, quorum ille a *Zach* nimis magnus est determinatus, a *La Place* autem justo minor assumptus videtur, & hic ne reductione quidem ad libellam maris instituta ad magnitudinem loco convenientem evehi potest; reliquos legem continuitatis non male sequi perspicuum est.

Ut autem verissimum est, ex his datis ope aequationum supra allatarum determinari posse valorem penduli polaris, ita rem examinanti mox patebit, faciliori calculo idem ope sequentium aequationum quam proxime, & majori quidem certitudine, quam qua pollent ipsae observationes, obtineri. Nulla nempe de natura densitatis terrae assumpta hypothesi, modo illud ponatur, meridianos omnes terrestres, utpote a figura circulari parum aberrantes, ellipticos esse, demonstratum est⁴, incrementum longitudinis penduli pro loco dato supra longitudinem penduli aequatorialis proportionale esse quadrato Sinus latitudinis loci geographicae. Facta igitur in eodem meridiano longitudine penduli ad Aequatorem = E , ad polum terrae = P , in latitudine geographica $l = p$, atque in latitudine $\lambda = \pi$, nec non incremento penduli memorato = x , est $p = E + x \sin^2 l$, & $\pi = E + x \sin^2 \lambda$, adeoque $P = E + x$. Eliminate autem quantitate E , eruitur $P - p = x \cos^2 l$, & $P - \pi = x \cos^2 \lambda$, unde $(P - p) \cos^2 \lambda = (P - \pi) \cos^2 l$, atque

$$P = \frac{p \cos^2 \lambda - \pi \cos^2 l}{\cos^2 \lambda - \cos^2 l},$$

qui valor ad computandum commodior redditur duabus hisce aequationibus:

$$\sin \beta = \frac{\cos l}{\cos \lambda}, \quad P = p + (p - \pi) \tan^2 \beta.$$

Hujus valoris certitudo inde perspicitur, quod variationes simultaneae quantitatum p , π , & P hac definiantur aequatione: $dP = dp + (dp - d\pi) \tan^2 \beta$, quae pro casu quo maximus oritur effectus variationum, quando scilicet p excessu aequae aberrat a vero ac π defectu, praebet

$$dP = \pm(1 + 2 \tan^2 \beta)dp.$$

cumque hic, ut supra factum est, sumere liceat $dp = 0,02$, habebitur

$$dP = \pm 0,02(1 + 2 \tan^2 \beta).$$

⁴Theorie de la figure de la Terre, par *Clairaut*, Paris 1743 p. 191.
Mechanik des Himmels von *La Place*, Berlin 1802, Th. 2, p. 121.

Omnes ex iis observationibus, quae supra sunt exhibitae, per combinationem valorum penduli duorum locorum, quae aut ad eundem pertinent meridianum, aut quorum meridiani ultra 5 fere gradus aequatoriales a se non distant, computati valores penduli polaris hic collecti oculis subjiciantur, cum adjecto valore probabilitatis, quae reciprocam sequitur rationem admittendi erroris penduli. Quo inde jam colligatur valor penduli polaris, quisque valor specialis cum sua probabilitate multiplicetur, & summa omnium productorum cum summa probabilitatum dividatur, ut in sequentibus apparebit.

Tabula 1: Longitudes penduli polaris ope binarum observationum determinandae.

	Loci	Valor penduli polaris	Probabilitas
Spitsbergen	Lugdunum	441,443	42,176
Spitsbergen	Mulgrave	441,452	34,458
Spitsbergen	Roma	441,444	44,509
Spitsbergen	Melita	441,439	45,307
Spitsbergen	Babao	441,449	46,488
Kola	Petropolis	441,717	15,921
Ponoi	Archangelopolis	441,570	7,996
Pello	Revalia	441,505	12,487
Pello	Dorpatum	441,466	22,367
Pello	Pernavia	441,476	21,772
Pello	Arensburgum	441,517	21,974
Pello	Caput bonae spei	441,514	31,457
Petropolis	Dorpatum	441,930	2,274
Petropolis	Pernavia	441,8903	2,280
Petropolis	Arensburgum	443,5914	0,602
Upsalia	Mulgrave	441,428	13,251
Upsalia	Gryphiswaldia	441,096	7,728
Upsalia	Schweidnitz	441,359	11,267
Upsalia	Vienna	441,362	15,997
Upsalia	Roma	441,395	18,730
Upsalia	Melita	441,326	22,246
Upsalia	Caput bonae spei	441,437	23,203
Mulgrave	Gryphiswaldia	441,338	21,895
Mulgrave	Schweidnitz	441,405	23,030
Mulgrave	Vienna	441,403	25,200
Mulgrave	Roma	441,414	29,094
Mulgrave	Melita	441,381	31,754
Mulgrave	Caput bonae spei	441,432	32,461
Dorpatum	Caput bonae spei	441,541	32,475
Pernavia	Caput bonae spei	441,547	21,480
Lugdunum	Parisi	441,706	3,515
Lugdunum	Tolosa	441,652	8,222
Lugdunum	Formentera	441,606	11,830
Lugdunum	Babao	441,596	20,462
Arensburgum	Caput bonae spei	441,495	21,351
Gryphiswaldia	Schweidnitz	442,062	3,667
Gryphiswaldia	Vienna	441,795	6,333
Gryphiswaldia	Roma	441,683	11,678
Gryphiswaldia	Melita	441,503	15,591
Gryphiswaldia	Caput bonae spei	441,684	16,672
Londinum	Parisi	441,299	2,799
Londinum	Tolosa	441,482	7,524
Londinum	Formentera	441,479	11,151
Londinum	Babao	441,518	19,867

Tabula 2: Continuatio.

	Loci	Valor penduli polaris	Probabilitas
Schweidnitz	Vienna	441,382	2,691
Schweidnitz	Roma	441,469	8,151
Schweidnitz	Caput bonae spei	441,541	13,330
Schweidnitz	Melita	441,278	12,205
Nootka	Monterey	441,147	10,525
Nootka	Madagascar	441,339	19,134
Nootka	Portus Ludovici	441,316	17,703
Parisii	Tolosa	441,605	4,765
Parisii	Formentera	441,554	8,460
Parisii	Babao	441,564	17,451
Vienna	Roma	441,519	5,508
Vienna	Melita	441,241	9,738
Vienna	Caput bonae spei	441,596	10,792
Tolosa	Formentera	441,477	3,754
Tolosa	Babao	441,542	13,134
Monterey	Portus Ludovici	441,654	7,756
Melita	Caput bonae spei	445,157	1,206
Megasaki	Manila	442,257	6,960
Formentera	Babao	441,578	9,557
Roma	Melita	440,799	4,221
Megasaki	Sambuangan	442,045	8,209
Megasaki	Puerto Egmont	441,296	14,463
Macao	Guarico	442,072	0,816
Macao	Parva Goava	442,080	1,217
Macao	St. Helena	441,867	12,753
Macao	Conception	441,262	7,142
Macao	Puerto Egmont	441,460	18,723
Guarico	Jamaica	442,699	0,530
Guarico	Lima	442,489	1,920
Guarico	Conception	441,333	7,939
Parva Goava	Lima	442,760	6,589
Parva Goava	Conception	441,360	8,330
Jamaica	Porto bello	441,353	5,522
Jamaica	Aequator	441,655	3,989
Jamaica	Lima	442,411	0,720
Jamaica	Conception	441,405	8,455
Acapulco	Pondichery	442,308	1,100
Manila	Sambuangan	440,674	1,276
Manila	Monte Video	441,799	8,207
Manila	St. Helena	441,922	14,798
Manila	Puerto Egmont	441,520	20,594
Porto bello	Aequator	442,480	1,376
Sambuangan	Monte Video	441,676	9,444
Sambuangan	Puerto Egmont	441,491	21,643
Para	Rio Janeiro	443,897	4,080
Lima	Conception	441,519	9,799
Aequator	Lima	440,671	1,120
Monte Video	Puerto Egmont	441,406	13,285
		441,4933	1232,521