AKATEEMINEN VÄITÖSKIRJA

MAAN MUODON MÄÄRITTÄMISESTÄ HEILUREIDEN AVULLA

Osa VI

PUHEENJOHTAJA

M. GUST. GABR. HÄLLSTRÖM

FILOSOFIAN MAISTERIN ARVON SAAVUTTAMISEKSI

RESPONDENTTI

JOHAN GABRIEL BONSDORFF

Matematiikan auditoriossa 27. kesäkuuta 1815

TURKU

Latinasta suomentanut
Jukka Nyblom
9. heinäkuuta 2019

Osassa V kehitetty menetelmä tuottaa heilurin pituuden arvoksi pohjoisnavalla[1]

$$P = \frac{544150}{1232{,}521} = 441{,}4933,$$

jota tosin voidaan pitää vain likimäärin oikeana. On kuitenkin olemassa perusteluja, jotka tuon epävarman arvon mahdollisesti muuttavat ja johdattavat toista kautta katsomaan, voiko sen määrittää luotettavammin. Joidenkin paikkojen mittaukset[2] esiintyvät nimittäin vertailussa useammin kuin muiden paikkojen, mistä seuraa, että jos tässä useammin esiintyvässä ilmenee jokin havaintovirhe, jota eivät muut havainnot korjaa, sen merkitys lopullisen arvon määrityksessä tulee suureksi. Kun tätä kysymystä sitten monipuolisesti tutkitaan toisellakin tavalla, nimittäin neliöiden minimoinnin menetelmällä, saadaan esiin todennäköisin arvo,

Määritellään nyt kuten ennenkin[3], että heilurin pituus päiväntasaajalla on E, ja että heilureiden pituuksien erotus pohjoisnavalla ja päiväntasaajalla on $P - E = x$, ja että mittauspaikan leveysaste on λ. Edellisen osan V mukaisesti tällä leveysasteella olevalla paikalla heilurin pituus on $p = E + x \sin^2 \lambda$. Tämän arvon p tilalle asetamme sen, joka on kokeellisesti määritetty, ja joka siitä poikkeaa vähäisen t:n verran. Saamme siis $p - E - x \sin^2 \lambda = t$. Tällä tavalla jokaisen paikan havainto toteuttaa vastaavan yhtälönsä[4]:

$$\begin{aligned} \text{Spitsbergen } 441{,}380 - E - 0{,}9685\,x &= t_1, \\ &\vdots \\ \text{Puerto Egmont } 440{,}611 - E - 0{,}6099\,x &= t_{49}, \end{aligned}$$

Sitten otamme kaikkien arvojen t neliöt, ja kiitetyn menetelmän mukaisesti pidämme aluksi muuttujaa E tarkastelun kohteena. Kaikkien neliöiden t^2 summan minimi toteuttaa $\mathrm{d}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \&c,) = 0$, mikä tässä tapauksessa, kun suure E kaikkialla on derivoinnin kohteena, palautuu siihen, että lasketaan aritmeettinen keskiarvo, joka toteuttaa yhtälön

$$440{,}1825 - E - 0{,}4102\,x = 0. \tag{1}$$

Kun tämä vähennetään alkuperäisistä yhtälöistä, saamme yhtälöjonon

$$\begin{aligned} 1{,}1975 - 0{,}5583\,x &= t_1, \\ &\vdots \\ 0{,}4285 - 0{,}1997\,x &= t_{49}. \end{aligned}$$

Neliöimällä nämä saadaan

$$\begin{aligned} 0{,}31169\,x^2 - 2 \cdot 0{,}66856\,x - \&c. &= t_1^2, \\ &\vdots \\ 0{,}03988\,x^2 - 2 \cdot 0{,}08557\,x - \&c. &= t_{49}^2. \end{aligned}$$

[1](Häl15, Taulukon viim. rivi, s. 10.). Suom. huom.
[2](Häl15, Taulukko, s. 8–10.) Suom. huom.
[3](Häl15, s. 6). Suom. huom.
[4](Häl15, Koko aineisto s. 6) Suom. huom.

Kun nämä yhtälöt kootaan summaksi, saadaan

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \&c. = 4,23447\,x^2 - 2 \cdot 9,72635\,x - \&c.$$

Kun se derivoidaan minimin saavuttamiseksi, saadaan

$$\mathrm{d}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \&c.) = 0 = 4{,}23447\,x\,\mathrm{d}x - 9{,}72635\,\mathrm{d}x,$$

mistä saadaan ratkaisuksi $x = 2{,}29695$. Kun se sijoitetaan aikaisempaan yhtälöön (1) saadaan $E = 439{,}2393$, joka tuottaa yksinkertaisen heilurin pituuden yleiseksi arvoksi[5]

$$p = 439{,}239 + 2{,}297 \sin^2 l.$$

Kun $l = 90°$, löydetään heilurin pituus pohjoisnavalla[6] $P = 441{,}539$, josta tulemme osoittamaan, että sitä ei kuitenkaan ole pidettävä toistaiseksi luotettavimpana arvona.

Jos nyt p:n arvo lasketaan tästä kaavasta jossakin paikassa, missä myös kokeellisesti saatu heilurin pituus tunnetaan, ero havaitusta pituudesta voi joskus olla varsin suuri. Ero voi johtua jostakin kerta kaikkiaan yllättävästä havaintovirheestä tai maanpinnan varsin huomattavasta epätasaisuudesta tai jopa siitä, että molemmat syyt vaikuttavat samanaikaisesti. Niinpä tällaisessa yleiseen määrittämiseen tähtäävässä vertailussa, jossa kaikki havainnot yhteisesti ja sopusoinnussa tuottavat saman lopputuloksen, ne havainnot, jotka näyttävät poikkeavan liikaa muista, pitäisi jättää kokonaan pois. Lisäksi on huomattava se seikka, että kun kaikki tehdyt havainnot otetaan mukaan, ne tuottavat Maalle sellaisen elliptisyyden, joka ei kyllin hyvin sovi yhteen muilla perusteilla johdetun elliptisyyden kanssa. Sillä näiden asioiden tutkijat ovat selvillä niistä täsmällisistä mittausoperaatiosta, joiden avulla erään pituuspiirin osien pituudet on määritetty. Lisäksi he tuntevat ne useat astronomiasta johdetut laskelmat (Sva05, Disc. prelim. XXVII), joiden perusteella kohti keskipistettä tihenevän epähomogeenisen Maan elliptisyydeksi on osoitettu likimäärin[7] $\frac{1}{305}$.

Aikaisemmin on näytetty (Häl10, s. 10), että

$$n = \frac{1}{p}\sqrt{P^2 + (P^2 - p^2)\tan^2 l}.$$

Kun asetetaan $l = 0$, niin p saa arvon E ja

$$n = \frac{P}{E}, \text{ eli } n - 1 = \frac{P - E}{E} = \frac{x}{E}.$$

Clairaut (Cla43, s. 250) ja Laplace (Lap02, s. 121, 180) osoittavat, että annetulla nopeudella akselinsa ympäri pyörivän ja kohti keskipistettä tihenevän Maan pinnalla

[5] Jostakin syystä λ vaihtuu tässä l:ksi. Suom. huom.

[6] Painovirhe, po. 441,536. Suom. huom.

[7] Svanberg antaa s. XXVIII ja XXIX useita elliptisyyden arvoja: $\frac{1}{309{,}4}$, $\frac{1}{304}$, $\frac{1}{305{,}05}$, $\frac{1}{304{,}6}$, $\frac{1}{307{,}4}$ ja $\frac{1}{307{,}17}$. Tekijöiden vakaumus, että $\frac{1}{305}$ olisi yleisesti hyväksytty Maan elliptisyyden arvo, vaikuttaa hiukan liioiteltulta. Suom. huom.

tasapaino vakiintuu, ja että keskipakovoiman takia painovoima vähenee päiväntasaajalla kertoimen $\frac{1}{289}$ verran. Nämä seikat antavat Maan oikeaksi elliptisyydeksi[8]

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{289} - \frac{x}{E} = 0{,}00865 - \frac{x}{E}.$$

Jos tähän kaavaan sijoitetaan äsken määritetyt arvot, kaikkiin heilurin pituuksiin perustuva Maan elliptisyys on

$$0{,}00865 - \frac{2{,}29695}{439{,}2393} = 0{,}003421 = \frac{1}{292{,}3}.$$

Koska arvo $\frac{1}{305}$ poikkeaa tästä, havaintojen joukossa on nähtävästi joitakin mittauksia, jotka tämän omaksutun elliptisyyden perusteella poikkeavat liikaa muista. Vertaamalla kaavasta laskettua p:n arvoa vastaavaan havaintoon[9] huomio kiinnittyy seuraaviin paikkakuntiin: Kuola, Mulgrave, Melita, Megasaki, Umatog, Rio de Janeiro ja St. Helena, joiden poikkeamat ylittävät $\frac{1}{10}$ Pariisin lineaa[10]. Jättämällä näiden paikkojen mittaukset pois ja tekemällä laskut uudelleen jäljelle jääneiden avulla saadaan samalla jo aikaisemmin käytetyllä menetelmällä arvot $x = 2{,}32941$ ja $E = 439{,}20943$, jotka tuottavat elliptisyyden $0{,}00335 = \frac{1}{298{,}5}$.

Samalla periaatteella olemme tehneet useita vertailuja poistamalla toistuvasti eri havaintoja, joiden luotettavuus on näyttänyt vähäisemmältä. Menettely on tuottanut elliptisyyden arvot

$$\frac{1}{312{,}6}, \frac{1}{309{,}8}, \frac{1}{303{,}7}, \frac{1}{301{,}4},$$

jotka kaikki selvästi osoittavat heilurihavainnoista johdetun Maan elliptisyyden oikean arvon, nimittäin niiden vaihteluvälin keskellä olevan arvon. Tämä ei ole suinkaan ristiriidassa muualta saadun arvon kanssa vaan paremminkin erittäin hyvin sopusoinnussa sen kanssa. Jos meillä olisi tasalaatuisia ja luotettavia heilurihavaintoja samankaltaisilta paikoilta eri puolilta maailmaa, ei näyttäisi olevan mitään epäilystä siitä, etteivätkö nekin todistaisi kaikkein todennäköisimmän elliptisyyden arvon olevan $\frac{1}{305}$.

Tämä elliptisyyden arvo on asetettava perustaksi, kun heilurin pituuden arvoa yleensä määritetään, sillä erilaiset ilmiöt vahvistavat sen kerta kaikkiaan ihailtavan yhdenmukaisesti. Missään muualla kuin Pariisissa ei ole heiluria, josta tämän annetun elliptisyyden arvon avulla yhtä varmasti on johdettavissa koko maailmaa koskeva yleinen kaava heilurin pituuden laskemiseksi. Sellaiseksi kaavaksi osoittautuu[11]

$$p = 439{,}2221 + 2{,}3596 \sin^2 l. \tag{2}$$

[8] Ks. Suomentajan liite.

[9] Tarkoittaa nykytermein sanottuna, että tekijät ovat laskeneet mallin jäännökset. Suom. huom.

[10] Käyttämällä tekijöiden estimoimia kertoimia saadaan, että kymmenystä suuremmat poikkeamat ovat paikoissa: Kuola, Melita, Megasaki, Umatog, Rio de Janeiro ja St. Helena. Poikkeama Mulgravessa on vain $-0{,}078$, joten se ei täytä asetettua poistamisehtoa. Suom. huom.

[11] Kaava saadaan (riittävän tarkasti), kun vaaditaan ensiksi, että elliptisyys on $1/305$. Tämä vaatimus johtaa yhtälöön $1/305 = 5/2 \cdot 1/289 - x/E$. Toiseksi vaaditaan, että Pariisin heilurin pituus on täsmälleen suoralla $p = E + x \sin^2 l$, mikä johtaa yhtälöön $440{,}5595 = E + x \cdot 0{,}5668$. Tämän yhtälöparin ratkaisu on suora (2). Suom. huom.

Siitä saadaan heilurin pituudeksi päiväntasaajalla $E = 439{,}2221$, joka on lähes sama kuin minkä Bouguer on määrittänyt. Heilurin pituudeksi pohjoisnavalla saadaan $P = 441{,}5817$ mitä suurimmalla todennäköisyydellä.

Taulukko 1: **Aineisto.**

Heilurin pituus	$\sin^2$(leveysaste)	Paikkakunta
441,380	0,9685	Spitsbergen
441,348	0,8701	Kola
441,122	0,8536	Mulgrave
441,210	0,8483	Ponoi
441,163	0,8448	Pello
441,132	0,8155	Archangelop.
441,005	0,7491	Petropolis
440,901	0,7479	Upsalia
440,934	0,7415	Revalia
440,917	0,7252	Dorpatum
440,920	0,7252	Pernavia
440,885	0,7231	Arensburgum
440,830	0,6558	Gryphisvaldia
440,710	0,6236	Lugdunum
440,638	0,6127	Londinum
440,635	0,6013	Schweidnitz
440,479	0,5797	Nootka
440,559	0,5668	Parisii
440,550	0,5559	Vienna
440,339	0,4755	Tolosa
440,310	0,4460	Roma
440,155	0,3903	Formentera
440,123	0,3555	Monterey
439,999	0,3544	Gades
440,220	0,3438	Melita
440,051	0,2924	Megasaki
439,594	0,1552	Macao
439,512	0,1145	Guarico
439,470	0,1002	Parva Goava
439,444	0,0955	Jamaica
439,412	0,0889	Acapulco
439,338	0,0636	Manilla
439,412	0,0585	Madagascar
439,226	0,0529	Umatog
439,282	0,0427	Pondichery
439,300	0,0275	Porto bello
439,268	0,0145	Sambuangan
439,249	0,0007	Para
439,210	0,0000	Aequator
439,274	0,0438	Lima
439,482	0,1023	Vavao
439,561	0,1188	Portus Ludovici
439,950	0,1514	Rio Janeiro
439,989	0,3103	Portus Jackson
439,976	0,3114	Promont.b.sp
440,033	0,3276	Monte Video
440,011	0,3572	Conception
440,518	0,4913	St. Helena
440,611	0,6099	Puerto Egmont

Suomentajan liite.

Maan litistyneisyys WGS84-ellipsoidin[12] parametrien avulla määriteltynä on

päiväntasaajan säde $a = 6378137$ metriä,
litistyneisyys $f = 1/298{,}257223563 \approx 1/298{,}3$,
napasäde $b = a(1 - f) = 6356752{,}3142$ metriä.

Havaitsemme, että ensimmäinen tutkielmassa esitetty arvo 1/292,3 hämmästyttävän lähellä määritelmän mukaista nykyarvoa.

Seuraavassa on yksinkertainen perustelu tutkielman laskuille. Esitys perustuu artikkeliin (Ekm98). Yllä määritelty litistyneisyys on geometrinen litistyneisyys. Heilureiden avulla saadaan gravitaatioon perustuva litistyneisyys

$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a},$$

missä γ_a on (kohtisuora) gravitaatio Päiväntasaajalla ja γ_b vastaava gravitaatio Pohjoisnavalla. Näiden kahden litistyneisyyden välillä yhteys, joka Clairaut'n lauseen mukaan on

$$f + f^* = \frac{5}{2} \cdot \frac{\omega^2 a}{\gamma_a},$$

missä ω on Maan pyörahdyksen kulmanopeus. Edelleen Clairaut osoitti, että gravitaatio γ on leveysasteen λ funktio

$$\gamma = \gamma_a(1 + f^* \sin^2 \lambda). \tag{3}$$

Koska heilurin pituuden p, heilahdusajan puolikkaan T ja gravitaation γ välillä on yhteys

$$T = \pi\sqrt{\frac{p}{\gamma}},$$

asettamalla $T = 1$ saamme $\gamma = \pi^2 p$. Jos tällaisen sekuntiheilurin pituus on Päiväntasaajalla p_a ja Pohjoisnavalla p_b, niin

$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} = \frac{p_b - p_a}{p_a}.$$

Sekuntiheilurin pituus toteuttaa myös kaavan (3), kun gravitaatiot korvataan vastaavien heilureiden pituuksilla. Tämä perustelee lineaarisen mallin ja pienimmän neliösumman käytön. Geometriselle elliptisyydelle saadaan kaava

$$\begin{aligned} f &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} - f^* \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} - \frac{p_b - p_a}{p_a}. \end{aligned}$$

[12]World Geodetic System, litistyneisyysparametri $1/f$ on määritelmä ja napasäde on laskettu sen avulla.
ks. https://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System#Main_parameters.

Sijoitetaan tähän likiarvot $a = 6400000\,\mathrm{m}$ (ks. ed. tarkka arvo 6378137) ja $\omega = 2\pi/86400\,\mathrm{s}^{-1}$ (vuorokaudessa on 86400 sekuntia) sekä

$$\gamma_a = \pi^2 p_a = \pi^2 439{,}21/443{,}296 = 9{,}7793\,\mathrm{m/s}^2,$$

missä 439,21 lineaa on havaittu pituus Päiväntasaajalla ja 443,296 lineaa vastaa 1 metriä. Silloin

$$\frac{\omega^2 a}{\gamma_a} = \frac{1}{289},$$

joka on sama kuin tekijöiden käyttämä arvo. Tekijöiden käyttämä arvo on kuitenkin saatu Laplacen teoksesta (Lap02, s. 180).

Määritellään regressiomalli

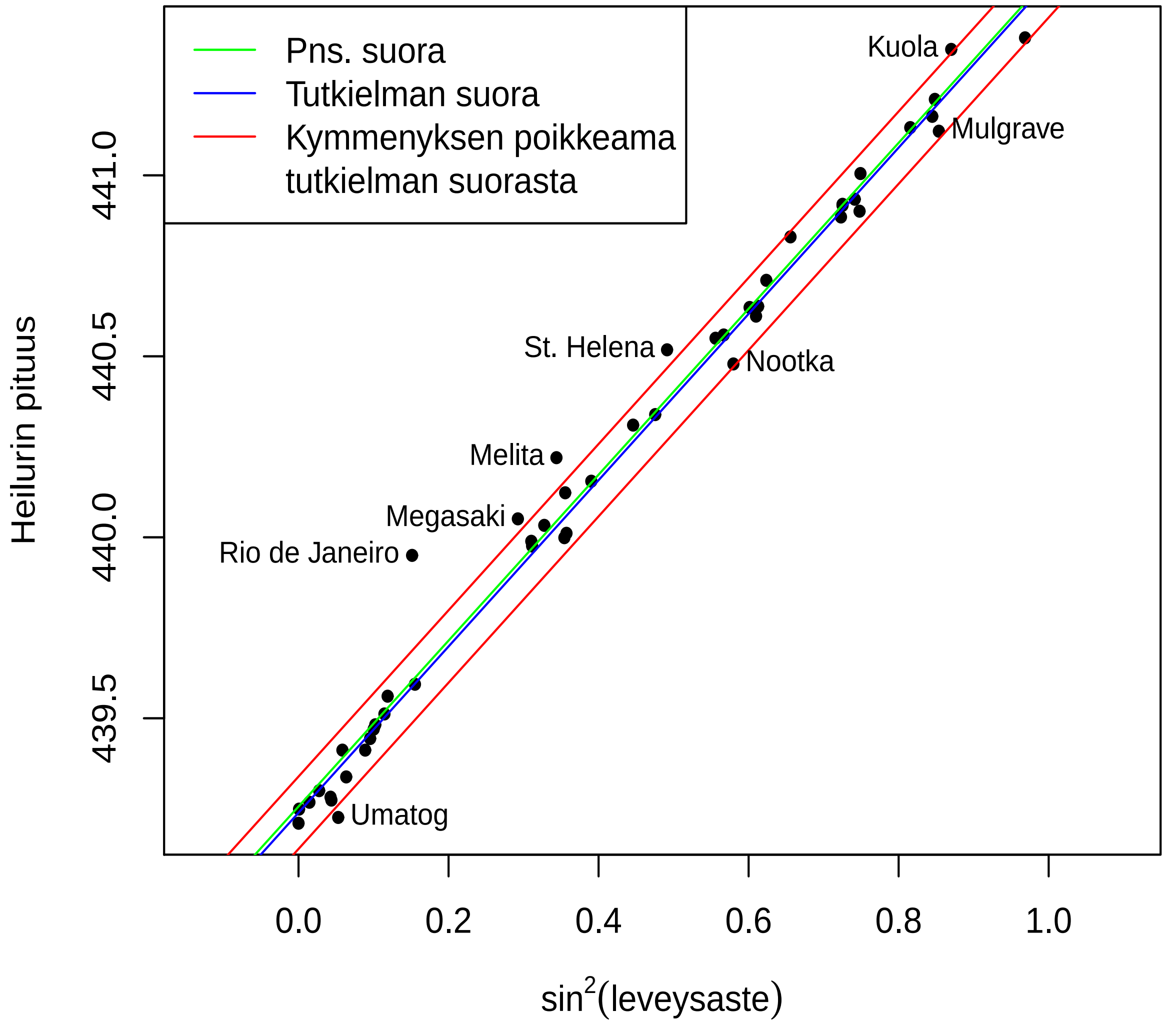
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 49,$$

missä y_i on havaittu heilurin pituus, paikkakunnan leveysasteen l_i muunnos $x_i = \sin^2(l_i)$ ja jäännöstermi ε_i. Tämän tutkielman aineiston avulla uudelleen laskettuna regressiokertoimien pienimmän neliösumman estimaatit ovat $\hat{\beta}_0 = 439{,}2562$ ja $\hat{\beta}_1 = 2{,}29203$, jotka poikkeavat hieman tutkielman antamista arvoista (439,2393 ja 2,29695). Soveltamalla Clairautin kaavaa näihin arvoihin saamme litistyneisyydeksi

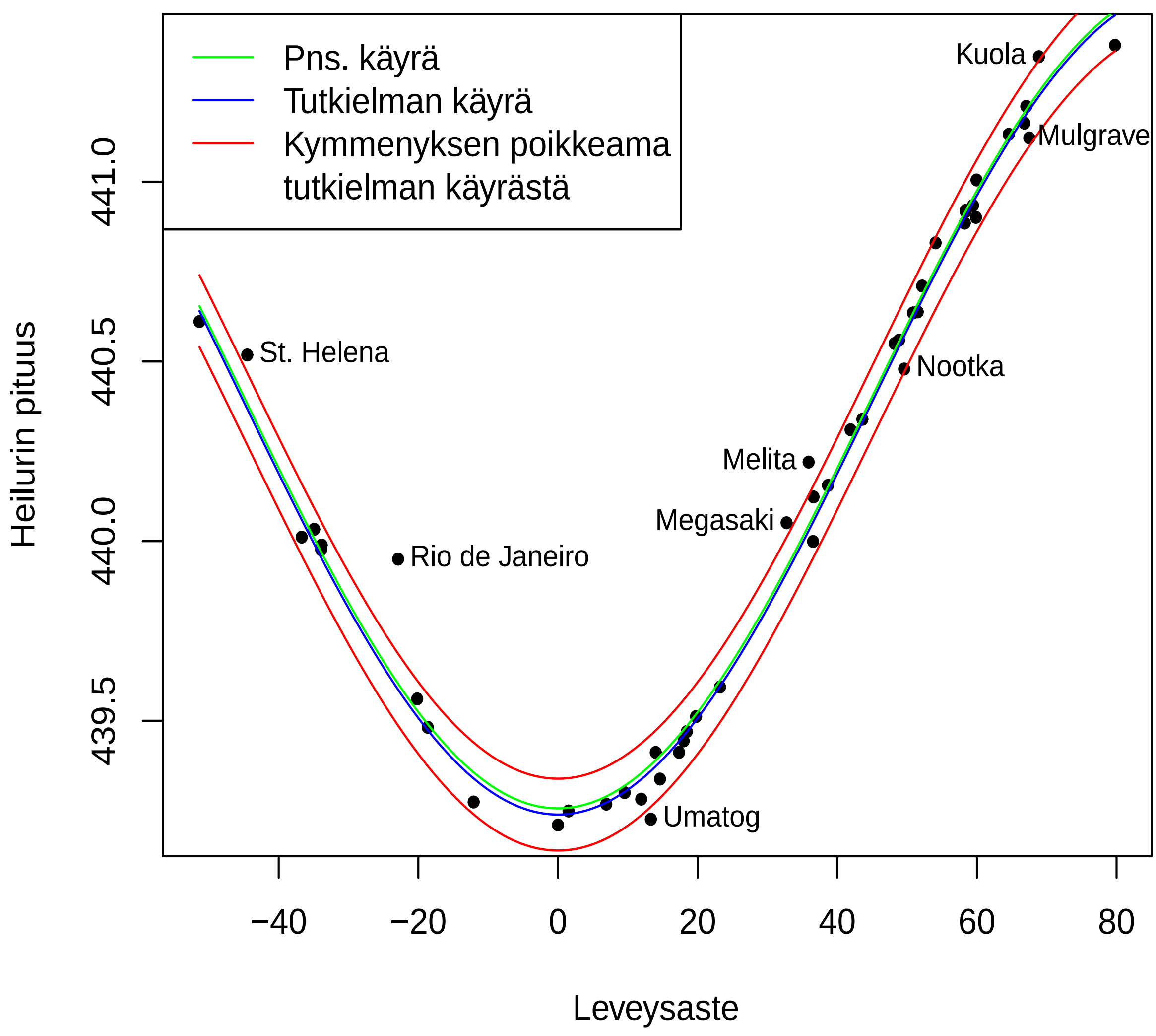
$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{289} - \frac{2{,}29203}{439{,}2562} = \frac{1}{291{,}3},$$

joka on tutkielman arvoa $\frac{1}{292{,}3}$ suurempi ja kauempana nykyarvosta.

Jos jätämme pois samat mittaukset kuin tutkielman tekijätkin, saamme regressiokertoimet $\hat{\beta}_0 = 439{,}23613$ ja $\hat{\beta}_1 = 2{,}30411$, jotka myös poikkeavat tutkielman arvoista 439,20943 ja 2,32941 ja tuottavat litistyneisyyden $\frac{1}{293{,}7}$. Tutkielman arvo $\frac{1}{298{,}5}$ on ilmeisesti laskettu pyöristetystä luvusta 0,00335. Tutkielman regressiokertoimista laskettuna arvoksi tulee $\frac{1}{298{,}8}$. Nämä molemmat viimeksi mainitut arvot ovat varsin lähellä nykyarvoa, mutta ei ole selvää miksi ne poikkeavat alkuperäisen aineiston perusteella lasketuista arvoista. Syinä voivat olla esim. lasku- ja pyöristysvirheet.



Kuva 1: Sovitetut suorat ja kymmenyksen poikkeama sekä poikkevat havainnot. Nootkaa ei ole tutkielmassa mainittu poikkevaksi havainnoksi.



Kuva 2: Sovitetut käyrät ja kymmenyksen poikkeama sekä poikkeavat havainnot. Negatiivisten asteiden itseisarvot ovat eteläisiä leveysasteita. Nootkaa ei ole tutkielmassa mainittu poikkevaksi havainnoksi.

Viitteet

[Cla43] Clairaut, M.: *Theorie de la Figure de la Terre.* David Fils, Paris, 1743. https://www.irphe.fr/~clanet/otherpaperfile/articles/Clairaut/N0062579_PDF_1_352.pdf.

[Ekm98] Ekman, M. & Mäkinen, J.: *An Analysis of the First Gravimetric Investigations of the Earth's Flattening and Interior using Clairaut's Theorem.* Small Publications in Historical Geophysics, (4), 1998. https://www.historicalgeophysics.ax/sp/04.pdf.

[Häl10] Hällström, G. G. & Appelgren, S. V.: *De figura Telluris ope pendulorum determinanda Part. IV.* Pro Gradu Philosophico, Academia Aboænsis, Junius 1810. http://urn.fi/urn:nbn:fi:fv-12632.

[Häl15] Hällström, G. G. & af Tengström, J. M.: *De figura Telluris ope pendulorum determinanda, Part. V.* Pro Gradu Philosophico, Academia Aboænsis, Maius 1815. http://urn.fi/urn:nbn:fi:fv-12633.

[Lap02] Laplace, P. S. de: *Mechanik des Himmels*, Teil 2. La Garde, Berlin, 1802. Übersetzt von J. C. Burckhardt. https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/449281.

[Sva05] Svanberg, J.: *Exposition des opérations faites en Lapponie pour la détermination d'un arc du méridien, en 1801–1803.* L'académie des sciences, Stockholm, 1805. https://archive.org/details/TO0E037814_TO0324_PNI-2547_000000/page/10.