Rahoitusteorian stokastisia malleja
Harjoitus 4

Tiistai 9.10.2012

MaD 381, klo 16.10

1. Olkoon $A_1, \dots, A_N$ joukon Ω ositus. Osoita, että
$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{A_j}\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i \chi_{A_i}.$$

2. Olkoon $A_1, \dots, A_N$ joukon Ω ositus ja $\mathcal{F} = \sigma(A_1, \dots, A_N)$. Olkoon lisäksi $B_1, \dots, B_M$ joukon Ω ositus ja $\mathcal{G} = \sigma(B_1, \dots, B_M)$ siten, että $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Osoita, että
$$\mathbb{E}\left(f|\mathcal{G}\right) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\mathbb{E}\left(f\chi_{B_j}\right)}{\mathbb{P}\left(B_j\right)} \chi_{B_j}$$
kaikilla $\mathcal{F}$-mitallisilla funktioilla $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

3. Olkoot $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ kuten edellisessä tehtävässä. Oletetaan lisäksi, että g on $\mathcal{G}$-mitallinen, eli että $g = \sum_{i=1}^{M} b_i \chi_{B_i}$ joillakin $b_i \in \mathbb{R}$. Osoita, että
$$\mathbb{E}\left(gf|\mathcal{G}\right) = \sum_{i=1}^{M} b_i \chi_{B_i} \sum_{j=1}^{M} \frac{\mathbb{E}\left(f\chi_{B_j}\right)}{\mathbb{P}\left(B_j\right)} \chi_{B_j}$$
kaikilla $\mathcal{F}$-mitallisilla funktioilla f.

   Minkä luennolla mainitun seikan tulimme todistaneiksi?

4. Olkoot $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ kuten edellisissä tehtävissä. Osoita, että jos f on $\mathcal{G}$-mitallinen, niin $\mathbb{E}\left(f|\mathcal{G}\right) = f$.

5. Tarkastellaan korollista yhden osakkeen yhden aika-askeleen mallia. Oletetaan, että korko on $r > 0$, $S_0^0 = 1$ ja $S_T^0 = 1 + r$. Olkoot lisäksi $0 < p < 1$, $K = 15$, $S_0 = 10$ ja
$$S_T = \begin{cases} S_T^u = 20 \text{ todennäköisyydellä } p \text{ ja} \\ S_T^d = 7,5 \text{ todennäköisyydellä } 1 - p. \end{cases}$$
   (a) Etsi sellainen $p = p_0$, jolle $\mathbb{E}_p \tilde{S}_T = S_0$, missä $\tilde{S}_T = \frac{S_T}{S_T^0}$ on osakkeen diskontattu hinta.
   (b) Laske $\mathbb{E}_{p_0} \frac{(S_T - K)^+}{S_T^0}$.

6. Selvitä kurssilla esiintyneet käsitteet
   (a) strategia,
   (b) omavarainen strategia,
   (c) hyväksyttävä strategia,
   (d) arbitraasistrategia ja
   (e) arbitraasivapaa hinnoittelumalli.