

Rahoitusteorian stokastisia malleja

Harjoitus 2

Tiistai 25.9.2012

MaD 381, klo 16.00

1.-3. Oletetaan, että yhden askeleen mallimme sisältää korollisen, riskittömän sijoituskohteen: $S_0^0 = 1$, $S_T^0 = 1 + r$, $r > 0$. Laske eurooppalaisen ostooption $f(S_T) = (S_T - K)^+$ tasapuolinen hinta C_0 korollisessa mallissa (seuraavien askelten avulla):

(1) Oletetaan, että S_T on joko $S_T^u = 20$ tai $S_T^d = 7,5$ ja $K = 15$. Laske suojausstrategia eli pari (ϕ_0, ϕ_1) , jolle

$$\phi_0 S_T^0 + \phi_1 S_T = (S_T - K)^+.$$

(2) Oletetaan lisäksi, että osakkeen hinta alussa on $S_0 = 10$. Laske eurooppalaisen ostooption tasapuolinen hinta C_0 .

Vinkki: muista, että $C_0 = \phi_0 S_0^0 + \phi_1 S_0$.

(3) Edellisten sijaan oletetaan vain, että $r > 0$ ja $S_T^d < S_0 \leq K < S_T^u$. Kirjoita C_0 suureiden S_0 , S_T^d , S_T^u , K ja r avulla.

4. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ ja $\Omega = \{0, 1, \dots, N\}$. Määritellään funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $f(x) = \chi_{\{1,2,3\}}(x)$ kaikilla $x \in \Omega$. Määritä alkukuvat $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{0\})$ ja $f^{-1}(\{0, 1\})$.

5. (a) Olkoon $\Omega = [0, 3]$. Anna esimerkki funktiosta $f : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$, joka generoi lähtöjoukkoon osituksen $[0, 1[$, $[1, 2[$, $[2, 3]$.

(b) Olkoon Ω epätyhjä joukko ja $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että funktio $f : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ generoi aina joukon Ω äärellisen osituksen $f^{-1}(\{x_1\}), \dots, f^{-1}(\{x_n\})$.

6. (a) Olkoon $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$. Määritä pienin σ -algebra, joka sisältää joukon $\{1, 3\}$.

(b) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritellään joukon $[0, 1[$ σ -algebra \mathcal{F}_n asettamalla $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right], k = 1, \dots, 2^n\right)$. Millaiset funktiot $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ovat \mathcal{F}_n -mitallisia?